

ED. DEWULF

Théorème de cinématique

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 297-300

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__297_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE CINÉMATIQUE ;

PAR M. ED. DEWULF,
Lieutenant-Colonel du Génie.

Une figure se déplace dans son plan : soient a et b deux de ses points, non situés en ligne droite avec le centre instantané de rotation O_1 , α et β les centres de

courbure des trajectoires de a et de b. Les droites ab , $\alpha\beta$ concourent sur une droite issue de O_1 et parallèle à la corde de l'arc déterminé par l'angle aO_1b sur le cercle des inflexions.

Pour démontrer ce théorème, nous allons nous appuyer sur un lemme que nous avons énoncé dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (mai 1881) :

Sur une droite issue du centre instantané de rotation O_1 , les points décrivants a et les centres de courbure α de leurs trajectoires forment deux ponctuelles projectives dont les points doubles se confondent en O_1 .

En effet, les segments O_1a , $O_1\alpha$ sont liés par la relation

$$\frac{1}{O_1\alpha} - \frac{1}{O_1a} \equiv \text{const.},$$

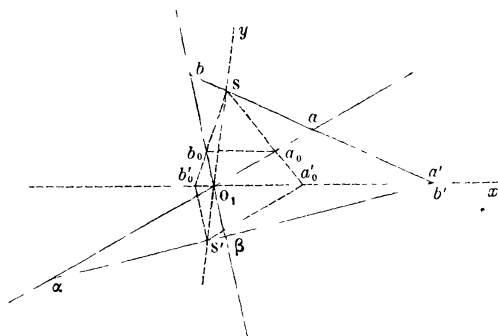
qui est l'expression la plus simple de deux ponctuelles projectives dont les points doubles se confondent en O_1 (CHASLES, *Géométrie supérieure*, 2^e édition, n^o 171).

Supposons maintenant que les ponctuelles projectives dont les points doubles se confondent en O_1 soient déterminées, sur O_1a , par le point a_0 correspondant au point α_∞ de l'infini, et sur O_1b par b_0 correspondant à β_∞ .

Pour construire le point α qui correspond à un point a , traçons, par le centre instantané O_1 , deux axes rectangulaires, tels que O_1x soit parallèle à la droite a_0b_0 , c'est-à-dire à la corde de l'arc déterminé par l'angle aO_1b sur le cercle des inflexions.

Soit S le point d'intersection de O_1y avec la droite ab ; si nous projetons, du point S, les points décrivants $a, \dots, a_0$ sur O_1x en $a', \dots, a'_0$, la ponctuelle de O_1x sera perspective avec la ponctuelle formée sur O_1a par

les centres de courbure $\alpha, \dots, \alpha_\infty$, et les droites qui joignent les points correspondants de ces deux ponctuelles vont concourir en un point S' de O_1S . Ce point S' est déterminé par la droite $a'_0\alpha_\infty$, c'est-à-dire par la parallèle à O_1a menée par a_0 . Si nous joignons ensuite le point S' au point a' , l'intersection de cette droite avec O_1a nous donne le point α centre de courbure de la trajectoire du point a .



Nous déterminons, de la même manière, le centre de courbure β de la trajectoire du point b . Nous tirons Sb_0 qui coupe O_1x en b'_0 et par b'_0 nous menons une parallèle à O_1b qui coupe O_1S au point S' .

En effet, le triangle formé par cette dernière droite, par $b'_0a'_0$ et par a'_0S' , a ses côtés respectivement parallèles à ceux du triangle $b_0O_1a_0$; ces deux triangles sont homologues, et la parallèle à O_1b menée par b'_0 coupe O_1S en S' . Donc, le point β se trouve sur la droite $\alpha a'$, ce qui démontre notre théorème.

Corollaire. — Soient (a) et (b) deux courbes de la figure mobile; (e_a) , (e_b) les enveloppes de ces courbes; α et β les centres de courbure de (a) et (b) en leurs points de contact avec leurs enveloppes.

On sait que les points a_0, b_0 , définis comme plus haut,

sont les projections sur $O_1 a$ et $O_1 b$ du centre instantané du second ordre O_2 .

On sait aussi que le centre de courbure α_1 de (e_a) au point de contact avec l'enveloppée n'est autre que le centre de courbure de la trajectoire de α . Le centre de courbure β_1 de (e_b) est le rayon de courbure de la trajectoire de β .

D'après notre théorème, énoncé ci-dessus, la droite issue de O_1 et parallèle à $a_0 b_0$ et les droites $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, concourent en un même point. Ainsi se trouve démontré le théorème de Cinématique, dû à M. Habich, et que ce géomètre a fait connaître récemment dans les *Nouvelles Annales* ⁽¹⁾.

Observation. — Le théorème général que nous avons démontré est lui-même un cas particulier de celui-ci :

Une figure se déplace dans son plan. Soient O le centre instantané de rotation, a et a' deux points quelconques fixes de la figure, b un point mobile sur Ob et β le centre de courbure de la trajectoire du point b au moment considéré; le lieu géométrique de l'intersection des rayons ab , $a'\beta$ est une conique passant par le centre instantané; si les points a et a' sont en ligne droite avec le centre O, ce lieu géométrique est une droite passant par O; enfin, si le point a' est le centre de courbure de la trajectoire du point a au moment considéré, le lieu géométrique est une droite passant par le centre instantané et parallèle à la corde qui sous-tend l'arc déterminé sur le cercle des inflexions par l'angle aOb .

30 octobre 1882.

(1) 3^e série, t. I, p. 458.