

E.-M. LAQUIÈRE

Recherche des cercles coupant trois cercles donnés sous des angles déterminés

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 272-287

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__272_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**RECHERCHE DES CERCLES COUPANT TROIS CERCLES DONNÉS
SOUS DES ANGLES DÉTERMINÉS ;**

PAR M. E.-M. LAQUIÈRE.

La lecture des formules fondamentales de Géométrie tricirculaire et tétrasphérique exposées par M. Lucas (*Nouv. Ann.*, 2^e série, t. XV, p. 501) nous remet en mémoire une formule que nous possédons depuis une quinzaine d'années environ, représentant l'équation de l'en-

semble des huit cercles qui coupent trois cercles donnés sous des angles déterminés.

La détermination d'un tel cercle nous avait vivement préoccupé à cette époque : nous en possédions plusieurs solutions, les unes géométriques, d'autres analytiques ; enfin notre ami, M. Halphen, alors au début de sa carrière scientifique, avait ajouté à ce nombre une solution analytique des plus élégantes, dont nous regrettons la perte parmi la plupart de nos notes égarées pendant le siège de Strasbourg.

Nous ne donnerons ici que l'une des solutions géométriques, absolument élémentaire ⁽¹⁾, et nous la ferons suivre de la formule dont nous venons de parler.

Les théorèmes suivants sont évidents sur simple énoncé :

I. *Les deux cercles C, C' passant par les points d'intersection de deux cercles C_1, C_2 et ayant leur centre en l'un des centres de similitude S, S' de ces derniers sont bissecteurs de leur angle (réel ou imaginaire) d'intersection.*

II. *Les deux cercles se coupent entre eux à angle droit. Le rayon de chacun est la racine carrée de la puissance composée des deux cercles par rapport au centre de similitude qui lui sert de centre.*

III. *Un cercle, dont la corde d'intersections alternée avec l'un et l'autre cercle passe au centre de similitude des points d'intersections, est isogonal aux deux cercles.*

IV. *Les cercles orthogonaux à l'un des cercles bissecteurs forment des séries de cercles isogonaux aux*

(¹) Une autre donnant les mêmes résultats était obtenue par la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques.

deux premiers dont le centre de similitude est centre radical commun à toutes ces séries, parmi lesquelles comptent les séries de cercles orthogonaux et de cercles tangents à la fois aux deux.

V. Si l'on considère trois cercles C_1, C_2, C_3 , la ligne $S_3S_1S_2$ de leurs centres de similitude est l'axe radical commun à toute la série de leurs cercles isogonaux, série dont font partie le cercle orthogonal et le cercle tangent aux trois cercles.

Dans la combinaison des centres de similitude, il est nécessaire que les similitudes inverses entrent en nombre pair 0 ou 2. Les diverses combinaisons de similitude directe ou inverse correspondent aux diverses combinaisons de signes des angles d'intersection comptés à partir de la circonférence sécante commune.

PROBLÈME. — Construire un cercle Γ coupant un cercle donné C sous un angle α déterminé et passant par deux points fixes A et B , réels ou imaginaires conjugués.

Premier cas : A et B réels. — Soient ρ le rayon du cercle Γ cherché et r celui du cercle C ; le cercle Γ' concentrique à Γ et de rayon $\rho' = \rho + r \cos \alpha$ est orthogonal au cercle C' concentrique à C et de rayon $r' = r \sin \alpha$. Il sera de plus tangent aux cercles décrits de A et B comme centres avec $r \cos \alpha$ pour rayon, que nous désignerons par cercles A, B .

Construisons le cercle auxiliaire A' passant par les points d'intersection des cercles A et C' , et dont le centre de similitude avec A soit le centre de C' . Les cercles A et A' ayant C' pour bissecteur seront coupés isogonalement par les cercles orthogonaux à celui-ci. Par suite, le cercle tangent aux trois cercles A, A', B ne sera autre

que le cercle Γ' , et les éléments de Γ sont ainsi déterminés.

Second cas : Les points A et B sont imaginaires conjugués, intersections de la droite L et d'un cercle S.

Le cercle Γ passant par A et B doit alors avoir la droite L comme axe radical avec S. Il a donc comme axe de symétrie le diamètre de S perpendiculaire à L. De plus, tous les points de L ont même puissance par rapport aux deux cercles. Le cercle Γ est donc orthogonal à tout cercle ayant son centre sur L et orthogonal à S.

Le problème précédent donne la solution du cercle coupant trois cercles donnés sous un même angle déterminé. Il donne sans plus de difficultés la solution du cercle coupant trois cercles donnés sous trois angles déterminés, solution fondée sur le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soient r_1, r_2, r_3 les rayons de trois cercles C_1, C_2, C_3 de centres O_1, O_2, O_3 ; le cercle Γ qui les coupe respectivement sous les angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a pour axe radical avec leur cercle orthogonal S une droite dont les points M_3, M_2, M_1 d'intersection avec les lignes des centres O_1O_2, O_3O_1, O_2O_3 détachent à partir des centres des segments déterminés par les rapports

$$\frac{M_3O_1}{M_3O_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \frac{M_2O_3}{M_2O_1} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \quad \frac{M_1O_2}{M_1O_3} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3},$$

où l'on fait

$$\lambda_1 = r_1 \cos \alpha_1, \quad \lambda_2 = r_2 \cos \alpha_2, \quad \lambda_3 = r_3 \cos \alpha_3.$$

$2\lambda_1, 2\lambda_2, 2\lambda_3$ étant respectivement les longueurs des cordes coupant les cercles O_1, O_2, O_3 sous les angles complémentaires de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Démonstration. — Considérons deux cercles C_1, C_2 ;

tous les cercles Σ orthogonaux à la fois à ces deux cercles ont leurs centres sur l'axe radical L de C_1 et C_2 et ont réciproquement pour axe radical commun la ligne $O_1 O_2$ de leurs centres. Le point M_3 d'intersection de celle-ci avec l'axe radical de l'un quelconque des cercles Σ avec le cercle Γ de centre ω , coupant C_1 en $m_1 n_1$ sous l'angle α_1 et C_2 en $m_2 n_2$ sous l'angle α_2 , est donc centre radical de Γ et de toute la série des cercles Σ orthogonaux à C_1 et C_2 .

Soit un second cercle Γ' coupant C_1 suivant $m'_1 n'_1$, et C_2 suivant $m'_2 n'_2$ sous des angles à la fois égaux ou supplémentaires des angles α_1, α_2 d'intersection de ces cercles et de Γ . Les cordes $m_1 m'_1, n_1 n'_1, m_2 m'_2, n_2 n'_2$ joignant les points d'intersection correspondants d'un même cercle C_1 ou C_2 avec les deux cercles Γ, Γ' également inclinés sur lui sont les unes et les autres isogonales aux deux cercles Γ, Γ' comme cordes sous-tendant dans le cercle C_1 ou le cercle C_2 un arc dont les extrémités coupent Γ et Γ' sous le même angle. Elles concourent donc en un centre S de similitude direct ou inverse des cercles Γ, Γ' , suivant que les angles d'intersection seront égaux ou supplémentaires. Le cercle S décrit de leur point de concours avec un rayon dont le carré s^2 égale la puissance composée de Γ et Γ' par rapport au point S (cercle bissecteur de Γ et Γ') sera orthogonal à la fois aux cercles C_1 et C_2 dont la puissance par rapport à S est précisément la puissance composée de ce point par rapport aux cercles Γ et Γ' . Il appartiendra donc à la série Σ

$$s^2 = S m_1 . S m'_1 = S n_1 . S n'_1 = S m_2 . S m'_2 = S n_2 . S n'_2.$$

L'axe radical des cercles Γ et Γ' , commun avec S , est donc axe radical de Γ et d'un cercle de la série Σ des orthogonaux communs à C_1 et C_2 . Il passe donc au

centre radical M_3 commun au cercle Γ et à toute la série Σ .

Le centre radical M_3 , commun à la série Σ de tous les cercles orthogonaux à la fois aux deux cercles C_1 et C_2 et à un cercle Γ les coupant sous des angles α_1 et α_2 , est donc également commun à la série des cercles Σ et à tous les cercles Γ' formant deux séries dont l'une coupe C_1 et C_2 sous les angles α_1 et α_2 , et l'autre sous les angles supplémentaires $\pi - \alpha_1$ et $\pi - \alpha_2$.

Cette observation suffit à déterminer le point M_3 sur la ligne des centres O_1, O_2 . C'est, en effet, le point de concours sur cette droite des deux transversales symétriques coupant les deux cercles C_1 et C_2 , l'une sous les angles donnés α_1, α_2 , l'autre sous les angles supplémentaires $-\alpha_1, -\alpha_2$. Ces transversales ne sont autres que les cercles à courbure nulle de l'une et l'autre série Γ . Les cordes interceptées par la transversale sont tangentes aux cercles de centres O_1 et O_2 ayant λ_1 et λ_2 respectivement pour rayons, et, par suite,

$$\frac{M_3 O_1}{M_3 O_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

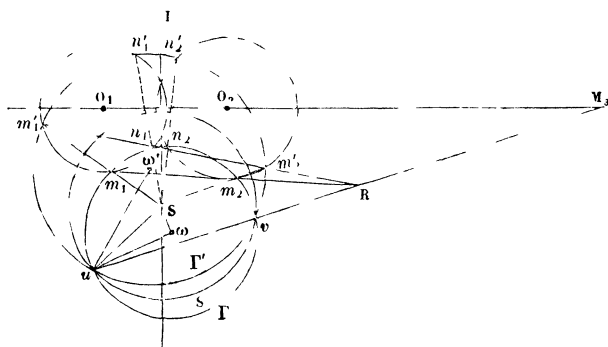
Soient maintenant les trois cercles C_1, C_2, C_3 que le cercle Γ doit couper sous les angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. L'axe radical Δ de celui-ci avec le cercle orthogonal à la fois aux trois coupera les lignes des centres en trois points M_3, M_1, M_2 déterminés par les relations énoncées ci-dessus. Il pourra donc être construit comme coupant l'un d'entre les cercles C_1, C_2, C_3 sous l'angle voulu et ayant avec leur cercle orthogonal un axe radical connu.

Les diverses combinaisons de signe des valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dont la grandeur absolue représente la longueur des cordes interceptées dans chaque cercle par le rayon du point d'intersection dans le cercle Γ , déterminent quatre

droites $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, à chacune desquelles correspondent deux solutions à angles d'intersections supplémentaires pour lesquelles, dans l'une et dans l'autre, les trois λ sont à la fois changés de signe. Ces deux cercles sont également inclinés sur le cercle orthogonal, leur bissecteur. On trouve ainsi les huit solutions obtenues par toutes les combinaisons de trois angles et de leurs trois supplémentaires.

Observation importante. — Si l'on fait varier $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ proportionnellement, les points M_3, M_2, M_1 restent invariables; d'où la remarque fort intéressante que l'axe radical d'un cercle quelconque avec le cercle orthogonal à trois cercles donnés lui est commun avec toute la série des cercles pour lesquels les cordes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ou les cosinus des angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ d'intersection varient proportionnellement. Le cercle orthogonal pour lequel ces valeurs sont nulles appartient à toutes les séries.

Remarque. — Dans la figure que l'on construira pour



suivre la démonstration précédente, les droites $m_1 m_2, m'_1 m'_2$ d'une part, $n_1 n_2, n'_1 n'_2$ d'autre part, concourent en un point R sur l'axe radical uv de Γ et Γ' , puisque le

quadrilatère $m_1 m'_1 m'_2 m_2$ est inscriptible, et, par suite, $R m_1 \cdot R m_2 = R m'_1 R m'_2$.

Recherchons maintenant l'équation de l'ensemble des huit cercles qui coupent trois cercles donnés sous trois angles déterminés.

Désignons par

- 1, 2, 3 les trois cercles donnés;
- α, β, r, C , avec les indices correspondants, les coordonnées cartésiennes du centre, le rayon et la puissance du point quelconque (x, y) par rapport à l'un des cercles;
- A, B, R, Γ , mêmes quantités par rapport au cercle Γ cherché;
- φ , angle de Γ et de C (avec l'indice correspondant);
- $\lambda = -2r \cos \varphi$, corde interceptée par C sur le rayon de Γ allant au point d'intersection. L'angle φ est celui des rayons des deux cercles;
- d , distance des centres de Γ et C.

L'équation de l'ensemble des cercles Γ coupant (1), (2), (3) sous les angles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sera le résultat de l'élimination de A, B, R entre les quatre équations

$$(1) \quad \begin{cases} \Gamma = 0, \\ d^2 = R^2 + r^2 + \lambda R, \end{cases}$$

l'équation en d étant reproduite trois fois avec les indices 1, 2, 3 aux quantités d, r, λ .

Or, si l'on observe d'une manière générale que

$$\begin{aligned} d^2 &= (\alpha - A)^2 + (\beta - B)^2 = R^2 + r^2 + \lambda R, \\ C &= (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2, \\ \Gamma &= (x - A)^2 + (y - B)^2 - R^2, \end{aligned}$$

retranchant membre à membre l'équation en d de l'équation Γ , on remplacera le système (1) par le sys-

tième équivalent

$$(2) \quad \begin{cases} (x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2, \\ (x - A) \frac{dC}{dx} + (y - B) \frac{dC}{dy} + \lambda R = C. \end{cases}$$

Les trois équations obtenues en donnant successivement les indices 1, 2, 3 à C dans l'équation de la seconde ligne déterminent les valeurs de $(x - A)$, $(y - B)$, R qui, portées dans l'équation de la première ligne, donnent le résultat de l'élimination, ou équation du lieu cherché. Si Δ représente le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{dC}{dx} & \frac{dC}{dy} & \lambda \end{vmatrix} = \Delta,$$

et X, Y, Z les résultats de la substitution de C aux quantités contenues respectivement dans la première, la deuxième et la troisième colonne, l'équation cherchée sera

$$(3) \quad X^2 + Y^2 = Z^2,$$

soit

$$(4) \quad \left| C \quad \frac{dC}{dy} \quad \lambda \right|^2 + \left| \frac{dC}{dx} \quad C \quad \lambda \right|^2 = \left| \frac{dC}{dx} \quad \frac{dC}{dy} \quad C \right|^2,$$

ou, en se servant des coordonnées homogènes et faisant ensuite $z = 1$,

$$(5) \quad \left| C \quad \frac{dC}{dy} \quad \lambda \right|^2 + \left| \frac{dC}{dx} \quad C \quad \lambda \right|^2 = \frac{1}{4} \left| \frac{dC}{dx} \quad \frac{dC}{dy} \quad \frac{dC}{dz} \right|^2.$$

Ces équations se prêtent à plusieurs remarques intéressantes :

I. Si l'on fait à la fois $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, l'équation se réduit à $Z = 0$. Sur la forme (5), on lit immédiatement que les polaires des points du cercle orthogonal par rapport aux trois cercles sont concourantes, et par

la symétrie des équations aux dérivées partielles qu'elles concourent en un point du cercle.

II. Si l'on cherche l'intersection du cercle $Z = 0$ avec les divers cercles du lieu, on reconnaît que l'équation (3) ne peut être satisfaite avec $Z = 0$ que si l'on a conjointement $X = 0$ et $Y = 0$, comme dans le cas du cercle orthogonal, ou bien qu'il est nécessaire que le dénominateur commun Δ soit nul. Les cercles du lieu coupent donc le cercle orthogonal au même point que le lieu $\Delta = 0$, soit

$$\frac{1}{4}\Delta = \begin{vmatrix} x - \alpha_1 & y - \beta_1 & \lambda_1 \\ x - \alpha_2 & y - \beta_2 & \lambda_2 \\ x - \alpha_3 & y - \beta_3 & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0,$$

dans lequel on reconnaît aisément la droite $M_3M_2M_1$ définie plus haut. Son équation, évidemment linéaire après le choix des signes fait sur $\cos \varphi$ pour chacune des quantités λ , est, en effet, satisfaite en posant, pour le point M_3 ,

$$\frac{x - \alpha_1}{x - \alpha_2} = \frac{y - \beta_1}{y - \beta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sqrt{(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2}}{\sqrt{(x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2}} = \frac{M_3O_1}{M_3O_2},$$

et de même pour M_2 et M_1 .

III. L'équation du système des huit cercles peut se mettre sous la forme d'un déterminant, tel que

$$\begin{vmatrix} X & Z + Y \\ Z - Y & X \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou bien} \quad \begin{vmatrix} Y & Z + X \\ Z - X & Y \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on fait

$$\lambda = \pm r \cos \varphi$$

et

$$X = \begin{vmatrix} C & \frac{dC}{dy} & \lambda \end{vmatrix},$$

$$Y = \begin{vmatrix} \frac{dC}{dx} & C & \lambda \end{vmatrix},$$

$$Z = \begin{vmatrix} \frac{dC}{dx} & \frac{dC}{dy} & C \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned} Z + Y &= \left| \frac{dC}{dx} \quad \frac{dC}{dy} - \lambda \quad C \right| = \left| \frac{dC}{dx} \quad \frac{dC}{dy} - \lambda \quad \frac{dC}{dz} + \lambda y \right|, \\ Z - Y &= \left| \frac{dC}{dx} \quad \frac{dC}{dy} + \lambda \quad C \right| = \left| \frac{dC}{dx} \quad \frac{dC}{dy} + \lambda \quad \frac{dC}{dz} - \lambda y \right|. \end{aligned}$$

Avec un choix préalable des signes de $\cos \varphi$, l'équation ne représente qu'un groupe des deux cercles conjugués.

En supposant le centre des coordonnées au centre du cercle orthogonal de rayon p (réel ou imaginaire), l'équation de l'ensemble des deux cercles conjugués ayant le cercle orthogonal pour bissecteur s'obtiendra fort simplement. On a, d'une manière générale,

$$C = x^2 + y^2 + 2ax + 2by + p^2 = 0 \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix};$$

d'où, en posant, pour simplifier,

$$\begin{aligned} L &= \begin{vmatrix} a & b & \lambda \end{vmatrix}, \\ M &= \begin{vmatrix} 1 & b & \lambda \end{vmatrix}, \\ N &= \begin{vmatrix} a & 1 & \lambda \end{vmatrix}, \\ 2T &= \begin{vmatrix} a & b & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

le dernier déterminant étant le double de la surface du triangle des centres O_1, O_2, O_3 , et le premier, le double de la somme des produits des triangles que le centre O du cercle orthogonal forme avec deux des centres, par la corde λ détachée sur le troisième cercle par les rayons du cercle Γ , on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \Delta &= Mx + Ny + L, \\ \frac{1}{2} X &= M(x^2 - y^2 + p^2) + 2Nxy + 2Lx \\ &= 2x(Mx + Ny + L) - M(x^2 + y^2 - p^2), \\ \frac{1}{2} Y &= N(y^2 - x^2 + p^2) + 2Mxy + 2Ly \\ &= 2y(Mx + Ny + L) - N(x^2 + y^2 - p^2), \\ Z &= -8T(x^2 + y^2 - p^2), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(Mx + Ny + L), \\ X &= x\Delta - 2M\Sigma, \\ Y &= y\Delta - 2N\Sigma, \\ Z &= -8T\Sigma, \end{aligned}$$

en représentant par Σ la puissance du point quelconque (x, y) par rapport au cercle orthogonal

$$\Sigma = x^2 + y^2 - p^2,$$

et l'équation (3) devient homogène et du second degré en Δ et Σ :

$$4\Sigma^2(M^2 + N^2 - 16T^2) + 4L\Sigma\Delta + p^2\Delta^2 = 0,$$

d'où les deux valeurs conjuguées de $\frac{\Sigma}{\Delta}$ représentant les deux cercles également inclinés sur le cercle orthogonal correspondant aux valeurs de λ respectivement changées de signe

$$\frac{\Sigma}{\Delta} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - p^2(M^2 + N^2 - 16T^2)}}{2(M^2 + N^2 - 16T^2)}.$$

Les valeurs des coordonnées A et B du centre cherché et son rayon R seront donnés par les expressions

$$A = x - \frac{X}{\Delta} = 2M \frac{\Sigma}{\Delta},$$

$$B = y - \frac{Y}{\Delta} = 2N \frac{\Sigma}{\Delta},$$

$$R = \frac{Z}{\Delta} = -8T \frac{\Sigma}{\Delta},$$

faciles à construire.

Les raisonnements et les calculs qui précèdent resteront les mêmes si de la Géométrie plane on passe à la Géométrie à trois dimensions, et la détermination de seize sphères coupant quatre sphères (1), (2), (3), (4) de centres O_1, O_2, O_3, O_4 , et de rayons r_1, r_2, r_3, r_4 sous des angles donnés $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, sera tout aussi simple. En posant $\lambda = -r \cos \varphi$, c'est-à-dire désignant par λ la longueur interceptée par la sphère de centre O sur les arêtes du cône ayant son sommet au centre de l'une Γ des sphères cherchées, et pour base le cercle d'intersec-

tion (réel ou imaginaire avec l'angle φ), on déterminera le plan radical de la sphère S et de la sphère orthogonale Σ aux quatre sphères données par la position des six points M d'intersection de ce plan avec les arêtes du tétraèdre des centres. Le point M_{12} où le plan radical coupe l'arête $O_1 O_2$ est déterminé par la relation

$$\frac{M_{12} O_1}{M_{12} O_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Ce plan déterminé, la construction sera ramenée à la détermination sur le plan diamétral commun à la sphère orthogonale et à l'une quelconque des quatre, ainsi qu'au plan radical, du cercle coupant sous un angle déterminé le grand cercle de la sphère choisie et ayant avec le grand cercle de la sphère orthogonale la trace du plan radical pour axe radical.

L'ensemble des seize sphères de la solution sera donné par l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = U^2,$$

où X, Y, Z, U représentent les déterminants résultats de la substitution de S avec l'indice convenable respectivement aux termes des première, deuxième, troisième et quatrième colonnes du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dS}{dx} & \frac{dS}{dy} & \frac{dS}{dz} & \lambda \end{vmatrix} \quad (\lambda = \pm r \cos \varphi),$$

qui représente le plan radical des sphères Γ cherchées et de la sphère orthogonale aux quatre sphères données représentées par l'équation générale

$$S = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 - r^2 = 0,$$

avec les indices 1, 2, 3, 4.

Représentant de même par L, M, N, P, 6V les déterminants

$$L = \begin{vmatrix} a & b & c & \lambda \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} 1 & b & c & \lambda \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} a & 1 & c & \lambda \end{vmatrix}, \\ P = \begin{vmatrix} a & b & 1 & \lambda \end{vmatrix}, \quad 6V = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \end{vmatrix},$$

où les sphères ont pour équation générale

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + c + p^2 = 0$$

rapportée au centre de la sphère orthogonale, on obtiendrait l'équation de l'ensemble des deux sphères conjuguées ayant le plan Δ radical commun avec la sphère orthogonale et pour lesquelles celle-ci est bissectrice du dièdre courbe d'intersection.

Représentant par $\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 - p^2$ la puissance d'un point par rapport à la sphère orthogonale, l'équation de l'ensemble des deux sphères conjuguées à intersections supplémentaires avec les quatre sphères s'obtiendra comme celle des deux cercles conjugués. On a, en effet, immédiatement, après le choix fait sur les signes de $\cos \varphi$ pour séparer les seize sphères S en huit groupes à intersections correspondantes supplémentaires dans les deux conjuguées :

$$X = x\Delta - 4M\Sigma,$$

$$Y = y\Delta - 4N\Sigma,$$

$$Z = z\Delta - 4P\Sigma,$$

$$U = -48V\Sigma;$$

d'où

$$16\Sigma^2(M^2 + N^2 + P^2 - 144V^2) + 8L\Delta\Sigma + p^2\Delta^2 = 0$$

et enfin

$$\frac{\Sigma}{\Delta} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - p^2(M^2 + N^2 + P^2 - 144V^2)}}{4(M^2 + N^2 + P^2 - 144V^2)}.$$

L'une des sphères correspond au signe $+$ affecté au radical; la sphère dont les angles d'intersection avec les quatre sphères sont respectivement supplémentaires correspond au signe $-$.

Les diverses combinaisons de signes pour les quatre cosinus donnent huit groupements, soit huit plans Δ radicaux des huit groupes avec la sphère Σ orthogonale aux quatre sphères données.

Les coordonnées du centre et le rayon de la sphère cherchée seront données par les valeurs

$$A = 4M \frac{\Sigma}{\Delta}, \quad B = 4N \frac{\Sigma}{\Delta}, \quad C = 4P \frac{\Delta}{\Sigma}, \quad R = -4V \frac{\Sigma}{\Delta}.$$

Nous terminerons par quelques détails sur la construction du cercle Γ coupant un cercle donné C sous l'angle φ et ayant avec un autre cercle Σ l'axe radical déterminé Δ .

Si, d'un point quelconque de Δ pris pour centre, on décrit un cercle auxiliaire I orthogonal au cercle Σ , il le sera également au cercle cherché Γ . Si, en outre, on décrit avec $r \sin \varphi$ pour rayon un cercle C' concentrique au cercle C , il sera tangent au milieu de la corde interceptée sur C par le rayon d'intersection de Γ et, par suite, orthogonal au cercle de rayon $R + r \cos \varphi$ concentrique à Γ . Le centre du cercle cherché est donc l'un des deux points d'intersection de la perpendiculaire A menée du centre de Σ à l'axe radical Δ et de la conique ayant pour cercles focaux le cercle auxiliaire I et le cercle de rayon $r \sin \varphi$ concentrique à C avec une différence de distances tangentielles égale à $r \cos \varphi$.

Cette remarque relie la construction obtenue par les raisonnements ci-dessus à la solution du problème qui consisterait à considérer le centre cherché comme situé sur les coniques ayant pour cercles focaux les cercles concentriques à C_1, C_2, C_3 et de rayons $r_1 \cos \varphi_1, r_2 \cos \varphi_2, r_3 \cos \varphi_3$ avec des différences de distances tangentielles

$$r_1 \sin \varphi_1 - r_2 \sin \varphi_2, \quad r_1 \sin \varphi_1 - r_3 \sin \varphi_3, \quad r_2 \sin \varphi_2 - r_3 \sin \varphi_3.$$

La directrice de la conique correspondant au cercle focal I n'est autre que l'axe radical de celui-ci avec le cercle C dont tous les points sont à une distance tangentielle $r \cos \varphi$ du cercle focal C' . La conique est donc dé-

terminée par les deux points d'intersection de I et C avec les tangentes en ces points, et par les points faciles à déterminer sur les tangentes communes aux deux cercles focaux. Son excentricité, égale au rapport de la distance tangentielle au cercle et à la distance à la corde de double contact, sera déterminée au moyen de l'un des points situés sur les tangentes communes aux deux cercles focaux conjugués. Elle est donc complètement déterminée, et la solution graphique du problème est complète.

La détermination des cercles coupant trois cercles donnés sous des angles donnés, ou des sphères coupant également sous des angles donnés quatre sphères données, est ainsi obtenue au moyen de constructions n'exigeant que la règle et le compas.
