

MAURICE D'OCAGNE

## Sur l'enveloppe de certaines droites variables

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1883), p. 252-259

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1883\\_3\\_2\\_\\_252\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__252_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

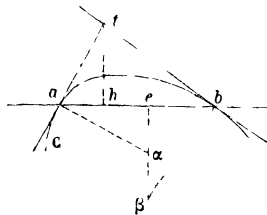
---

## SUR L'ENVELOPPE DE CERTAINES DROITES VARIABLES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

---

1. Soient, dans un plan,  $C$  une courbe fixe quelconque,  $ab$  une droite mobile coupant cette courbe aux



points  $a$  et  $b$ ; les tangentes à la courbe  $C$  aux points  $a$

et  $b$  se coupent au point  $t$ ; la droite  $ab$  touche son enveloppe au point  $e$ ; la droite  $ex\beta$  normale à cette enveloppe coupe en  $\alpha$  et  $\beta$  les normales  $ax$  et  $b\beta$  à la courbe C.

L'objet de la présente Note est la détermination du point  $e$ , lorsque la droite mobile est assujettie à certaines conditions remarquables.

LE SEGMENT DE DROITE  $ab$  EST DE LONGUEUR CONSTANTE.

2. On sait que, dans ce cas, rappelé ici à simple titre de mémoire, *le point  $e$  s'obtient en abaissant du point de rencontre de  $ax$  et  $b\beta$  une perpendiculaire sur  $ab$* . C'est une des propriétés fondamentales du centre instantané de rotation.

3. Si la courbe C se compose de deux droites concourantes, l'enveloppe de  $ab$  est une *épicycloïde à quatre points de rebroussement* <sup>(1)</sup>.

L'ARC  $ab$  EST DE LONGUEUR CONSTANTE.

4. Représentant par  $d(a)$  et  $d(b)$  les arcs infiniment petits correspondants décrits par les points  $a$  et  $b$  sur la courbe C, nous avons, en vertu d'un théorème connu,

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{at \cdot ae}{bt \cdot be},$$

et comme, dans ce cas,  $d(a) = d(b)$ ,

$$\frac{ae}{be} = \frac{bt}{at},$$

d'où l'on conclut, pour la détermination du point  $e$  :

(1) M. Mannheim a publié, dans les *Nouvelles Annales*, une étude géométrique de cette courbe (2<sup>e</sup> série, t. XVII, p. 321).

**THÉOREME.** — Si  $t'$  est la symétrique du point  $t$  par rapport au milieu du segment  $ab$ , le point  $e$  se trouve sur la bissectrice de l'angle  $at'b$ .

5. J'ai démontré ailleurs <sup>(1)</sup>, par la simple Géométrie, que si, dans ce cas, la courbe  $C$  se compose de deux droites concourantes, l'enveloppe de la droite  $ab$  est une *parabole* tangente à ces deux droites et ayant pour axe leur bissectrice.

**LA SOMME DE L'ARC  $ab$  ET DU SEGMENT  $ab$  EST CONSTANTE.**

6. On a, dans ce cas,

$$d(ab) + d(\text{arc } ab) = 0,$$

ou

$$d(ab) + d(b) - d(a) = 0.$$

Or

$$d(a) = d(b) \frac{ae.at}{be.bt},$$

et, en appelant  $d\omega$  l'angle de deux positions infiniment voisines de  $ab$ ,

$$d(ab) = \alpha\beta.d\omega,$$

ou, puisque, d'après un théorème connu,  $d\omega = \frac{d(\alpha)}{\alpha}$ ,

$$\begin{aligned} d(ab) &= \alpha\beta \cdot \frac{d(\alpha)}{\alpha} = \alpha\beta.d(b) \frac{ae.at}{be.bt} \frac{\sin tab}{ae} \\ &= d(b) \frac{\alpha\beta.at}{be.bt} \sin tab. \end{aligned}$$

L'équation différentielle écrite plus haut devient donc

$$d(b) \frac{\alpha\beta.at}{be.bt} \sin tab + d(b) - d(b) \frac{ae.at}{be.bt} = 0,$$

ou

$$\alpha\beta.at \sin tab + be.bt - ae.at = 0,$$

<sup>(1)</sup> Journ. de Math. élém., t. IV, p. 160.

ou encore

$$\alpha\beta.th + be.bt - ae.at = 0.$$

Si l'on remarque que

$$\alpha\beta = be.\cot tba - ae.\cot tab,$$

l'équation précédente devient

$$be(th.\cot tba + bt) - ae(th.\cot tab + at) = 0,$$

ou

$$\frac{be}{ae} = \frac{ah + at}{bh + bt}.$$

Cette expression permettrait de construire le point  $e$ , mais nous allons la transformer. En effet, elle peut s'écrire

$$\frac{be}{ae} = \frac{at(1 + \cos tab)}{bt(1 + \cos tba)} = \frac{at.\cos^2 \frac{tab}{2}}{bt.\cos^2 \frac{tba}{2}};$$

d'ailleurs

$$\frac{at}{bt} = \frac{\sin tba}{\sin tab} = \frac{\sin \frac{tba}{2} \cos \frac{tba}{2}}{\sin \frac{tab}{2} \cos \frac{tab}{2}};$$

donc

$$\frac{be}{ae} = \frac{\sin \frac{tba}{2} \cos \frac{tba}{2} \cos^2 \frac{tab}{2}}{\sin \frac{tab}{2} \cos \frac{tab}{2} \cos^2 \frac{tba}{2}} = \frac{\tan \frac{tba}{2}}{\tan \frac{tab}{2}},$$

expression qui se traduit immédiatement par l'énoncé suivant :

**THÉOREME.** — *Le point  $e$  est le point de contact sur  $ab$  du cercle exinscrit au triangle  $atb$ , situé dans l'angle  $atb$ .*

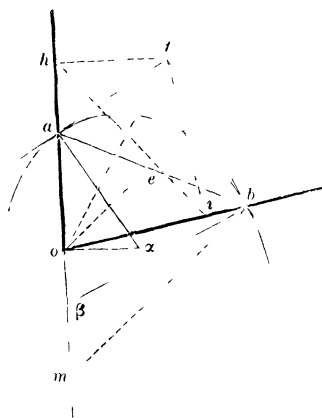
7. Il résulte de là que, si la courbe  $C$  se compose de deux droites concourantes, l'enveloppe de  $ab$  est un cercle tangent à ces deux droites.

LE SEGMENT  $ab$  EST VU D'UN POINT FIXE  
SOUS UN ANGLE CONSTANT.

8. Soit  $o$  le point fixe. Nous avons

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{ae \cdot at}{be \cdot bt}.$$

La normale  $ax$  coupe en  $\alpha$  la perpendiculaire  $ox$  à  $oa$ ,  
c'est-à-dire la normale à l'enveloppe de  $oa$ , puisque cette



droite tourne autour du point  $o$ . De même, la normale  
 $b\beta$  coupe en  $\beta$  la perpendiculaire  $o\beta$  à  $ob$ ; et l'on a

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{ax}{b\beta}.$$

Par suite

$$\frac{at \cdot ae}{bt \cdot be} = \frac{ax}{b\beta}$$

et

$$\frac{ae}{be} = \frac{ax}{at} \frac{bt}{b\beta}.$$

Abaissions du point de rencontre  $t$  des tangentes les perpendiculaires  $th$  et  $ti$  sur  $ao$  et  $bo$ ; les triangles  $ao\alpha$  et  $tha$  sont semblables, ainsi que  $bo\beta$  et  $tib$ ; donc

$$\frac{a\alpha}{at} = \frac{ao}{th}, \quad \frac{bt}{b\beta} = \frac{ti}{bo},$$

et, par suite,

$$\frac{ae}{be} = \frac{ao \cdot ti}{th \cdot bo}.$$

Tirons  $bm$  parallèle à  $oe$ ; nous avons

$$\frac{ae}{be} = \frac{ao}{mo};$$

donc

$$\frac{ao}{mo} = \frac{ao \cdot ti}{th \cdot bo},$$

ou

$$\frac{bo}{mo} = \frac{ti}{th},$$

égalité qui fait voir, en remarquant que les angles  $\widehat{hti}$  et  $\widehat{bom}$  sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires, que les triangles  $thi$  et  $omb$  sont semblables; et comme les côtés homologues  $th$  et  $mo$ , d'une part,  $ti$  et  $bo$ , de l'autre, sont perpendiculaires, il en résulte que  $hi$  est perpendiculaire à  $mb$  et, par suite, à  $oe$ .

On aura donc le point  $e$  cherché, en projetant le point de rencontre  $t$  des tangentes en  $h$  et en  $i$  sur les côtés  $oa$  et  $ob$  de l'angle constant et en abaissant du point  $o$  une perpendiculaire sur la droite  $hi$ .

Mais cette construction peut être simplifiée. En effet, tirons la droite  $ot$ ; le quadrilatère  $ohit$  est inscriptible, puisque ses angles en  $h$  et en  $i$  sont droits; par suite,  $\widehat{hot} = \widehat{hit}$ ; mais  $\widehat{hit} = \widehat{ioc}$ , comme ayant leurs côtés perpendiculaires; donc  $\widehat{hot} = \widehat{hit}$ .

On aura donc encore le point  $e$ , en faisant l'angle  $\widehat{boe}$  égal à l'angle  $\widehat{toa}$ .

9. APPLICATION. — Dans une ellipse, une corde  $ab$  est constamment vue du centre  $o$  sous un angle droit; quelle est l'enveloppe de cette corde?

La droite  $ot$  coupe  $ab$  en son milieu; elle est donc médiane du triangle  $aob$ , et, comme ce triangle est rectangle en  $o$ ,  $\widehat{toa} = \widehat{bao}$ ; si  $e$  est le point où  $ab$  touche son enveloppe, on a, d'après ce qui précède,  $\widehat{aoe} = \widehat{toa}$ ; donc  $\widehat{aoe} = \widehat{bao}$ ; et, comme  $ob$  est perpendiculaire à  $oa$ ,  $oe$  sera perpendiculaire à  $ab$ ; la normale  $oe$  à l'enveloppe de  $ab$  passant par le point fixe  $o$ , cette enveloppe est un cercle ayant ce point pour centre.

LES TANGENTES A L'EXTRÉMITÉ DE L'ARC  $ab$  FONT  
ENTRE ELLES UN ANGLE CONSTANT.

10. On a toujours

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{ae.at}{bc.bt}.$$

D'ailleurs, si  $R$  et  $R'$  sont les rayons de courbure en  $a$  et  $b$ ,  $d\theta$  et  $d\theta'$  les angles de contingence en ces points, on a

$$d(a) = R d\theta, \quad d(b) = R' d\theta'.$$

Mais, puisque  $\widehat{atb}$  est constant,  $d\theta = d\theta'$  : donc

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{R}{R'};$$

par suite,

$$\frac{ae.at}{bc.bt} = \frac{R}{R'}.$$

Appelons  $\alpha$  et  $\beta$  les centres de courbure en  $a$  et  $b$ ,  $o$  un point tel que les rayons  $a\alpha$  et  $b\beta$  soient vus de ce point sous des angles droits; nous retomberons alors sur la même figure que pour la question précédente, avec les mêmes relations, et nous arriverons, par conséquent, au même résultat.

Donc, le point  $o$  étant défini ainsi qu'il vient d'être dit, on aura le point  $e$  où  $ab$  touche son enveloppe *en faisant*  $\widehat{aoe} = \widehat{tob}$ .

Dans le cas particulier des coniques, ce problème donne lieu à un théorème plus intéressant, qui rentre dans le cadre d'un travail plus étendu que nous publierons prochainement dans les *Nouvelles Annales*.