

A. LEGOUX

**Note sur un faisceau de surfaces
d'ordre quelconque**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 233-236

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_233_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR UN FAISCEAU DE SURFACES D'ORDRE QUELCONQUE;

PAR M. A. LEGOUX.

Soit

(1)
$$U = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} u^{\delta} - k w = 0$$

l'équation d'un système de surfaces d'ordre quelconque.

On suppose que x, y, z, u sont les coordonnées homo-

gènes d'un point de l'espace, que $\omega = ax + by + cz + du$, que $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, et que k est un paramètre variable.

Recherche de la hessienne. — On trouve sans difficulté

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= k\omega^{\varepsilon-1} \left(a\varepsilon - \frac{\alpha\omega}{x} \right), & \frac{dU}{dy} &= k\omega^{\varepsilon-1} \left(b\varepsilon - \frac{\beta\omega}{y} \right), \\ \frac{dU}{dz} &= k\omega^{\varepsilon-1} \left(c\varepsilon - \frac{\gamma\omega}{z} \right), & \frac{dU}{du} &= k\omega^{\varepsilon-1} \left(d\varepsilon - \frac{\delta\omega}{u} \right); \\ a' &= \frac{d^2U}{dx^2} = k\omega^{\varepsilon} \left[\frac{a^2\varepsilon(\varepsilon-1)}{\omega^2} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} \right], \\ b' &= \frac{d^2U}{dy^2} = k\omega^{\varepsilon} \left[\frac{b^2\varepsilon(\varepsilon-1)}{\omega^2} - \frac{\beta(\beta-1)}{y^2} \right], \\ c' &= \frac{d^2U}{dz^2} = k\omega^{\varepsilon} \left[\frac{c^2\varepsilon(\varepsilon-1)}{\omega^2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{z^2} \right], \\ d' &= \frac{d^2U}{du^2} = k\omega^{\varepsilon} \left[\frac{d^2\varepsilon(\varepsilon-1)}{\omega^2} - \frac{\delta(\delta-1)}{u^2} \right]; \\ f &= \frac{d^2U}{dydz} = k\omega^{\varepsilon} \left[\frac{bc\varepsilon(\varepsilon-1)}{\omega^2} - \frac{\beta\gamma}{yz} \right], \\ g &= \frac{d^2U}{dzdx} = k\omega^{\varepsilon} \left[\frac{ca\varepsilon(\varepsilon-1)}{\omega^2} - \frac{\gamma\alpha}{zx} \right], \\ h &= \frac{d^2U}{dxdy} = k\omega^{\varepsilon} \left[\frac{ab\varepsilon(\varepsilon-1)}{\omega^2} - \frac{\alpha\beta}{xy} \right], \\ l &= \frac{d^2U}{drdu} = k\omega^{\varepsilon} \left[\frac{ad\varepsilon(\varepsilon-1)}{\omega^2} - \frac{\alpha\delta}{xu} \right], \\ m &= \frac{d^2U}{dydu} = k\omega^{\varepsilon} \left[\frac{bd\varepsilon(\varepsilon-1)}{\omega^2} - \frac{\beta\delta}{yu} \right], \\ n &= \frac{d^2U}{dzdu} = k\omega^{\varepsilon} \left[\frac{cd\varepsilon(\varepsilon-1)}{\omega^2} - \frac{\gamma\delta}{zu} \right]. \end{aligned}$$

On sait que l'équation de la surface hessienne est

$$\begin{aligned} & \alpha' b' c' d' + 2\alpha' f m n + 2b' g n l + 2c' h l m + 2d' f g h \\ & - b' c' l^2 - c' a' m^2 - a' b' n^2 - a' d' f^2 - b' d' g^2 - c' d' h^2 \\ & + f^2 l^2 + g^2 m^2 + h^2 n^2 - 2ghm n - 2hfnl - 2fg'lm - 0. \end{aligned}$$

Le résultat de la substitution des valeurs de a', b', c', \dots dans cette équation paraît au premier abord extrêmement compliqué. Mais si l'on ordonne relativement aux puissances de $\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{\omega^2}$, on constate à l'inspection de l'équation que les coefficients de $\left[\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{\omega^2}\right]^4$, $\left[\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{\omega^2}\right]^3$, $\left[\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{\omega^2}\right]^2$ sont nuls identiquement, et le résultat final peut s'écrire sous la forme

$$\omega^{3\varepsilon-2} x^{\alpha-2} y^{\beta-2} z^{\gamma-2} u^{\delta-2} \left\{ \begin{array}{l} \alpha\beta\gamma\delta\omega^2 - \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \\ \quad \times (2bcyz + 2cazx + 2abxy \\ \quad + 2adxu + 2bdyu + 2cdzu) \\ + \beta\gamma\delta\varepsilon(\beta + \gamma + \delta - 1)a^2x^2 \\ + \alpha\gamma\delta\varepsilon(\alpha + \gamma + \delta - 1)b^2y^2 \\ + \alpha\beta\delta\varepsilon(\alpha + \beta + \delta - 1)c^2z^2 \\ - \alpha\beta\gamma\varepsilon(\alpha + \beta + \gamma - 1)d^2u^2 \end{array} \right\}.$$

Cette équation se décompose dans les suivantes

$$(2) \quad \omega^{3\varepsilon-2} = 0,$$

$$(3) \quad x^{\alpha-2} y^{\beta-2} z^{\gamma-2} u^{\delta-2} = 0,$$

$$\begin{aligned} & \alpha\beta\gamma\delta\omega^2 - \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon(2bcyz + 2cazx + 2abxy \\ & \quad + 2adxu + 2bdyu + 2cdzu) \\ & + \beta\gamma\delta\varepsilon(\beta + \gamma + \delta - 1)a^2x^2 + \alpha\gamma\delta\varepsilon(\alpha + \gamma + \delta - 1)b^2y^2 \\ & + \alpha\beta\delta\varepsilon(\alpha + \beta + \delta - 1)c^2z^2 + \alpha\beta\gamma\varepsilon(\alpha + \beta + \gamma - 1)d^2u^2 = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation prend la forme plus simple

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\beta + \gamma + \delta}{\alpha} a^2 x^2 - \frac{\alpha + \gamma + \delta}{\beta} b^2 y^2 - \frac{\alpha + \beta + \delta}{\gamma} c^2 z^2 \\ -\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\delta} d^2 u^2 + 2bcyz + 2cazx + 2abxy \\ \quad + 2adxu + 2bdyu + 2cdzu = 0; \end{array} \right.$$

il suffit pour cela de remplacer ω par sa valeur et ε par $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

L'équation (4) représente une surface conique imaginaire du second ordre.

• Comme les équations (2), (3) et (4) ne contiennent pas le paramètre k , elles représentent le lieu géométrique des courbes paraboliques ⁽¹⁾ tracées sur les surfaces du faisceau. On sait que la surface hessienne passe aussi par les points singuliers et par les lignes multiples des surfaces. Or il n'y a pas d'autres lignes multiples que les intersections des quatre plans x, y, z, u avec le plan w , et il n'y a pas de points singuliers, comme on peut s'en assurer en égalant à zéro les dérivées partielles $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz}, \frac{dU}{du}$. Donc l'équation (4) est bien le lieu des courbes paraboliques tracées sur les surfaces. Les équations (2) et (3) représentent les plans x, y, z, u, w ; résultat évident, car ces cinq plans forment des surfaces singulières du système que l'on obtient en faisant soit $k = 0$, soit $k = \infty$. Comme l'équation (4) représente une surface conique, on voit que les courbes paraboliques sont distribuées sur un cône imaginaire du second degré. Si le degré ε est impair, les surfaces ont des inflexions suivant les quatre droites xw, yw, zw, uw , c'est-à-dire que le plan tangent suivant ces droites coupe la surface; si ε est pair, la surface est tout entière du même côté du plan tangent dans le voisinage de chacune de ces droites.

(A suivre.)

(1) On sait que, de même que la courbe hessienne dans le plan rencontre une courbe aux points d'inflexion, la surface hessienne rencontre une surface suivant une courbe dont tous les points ont une indicatrice parabolique, et qu'on appelle *courbe parabolique*. Dans le plan, la hessienne passe aussi aux points singuliers; dans l'espace, la surface hessienne contient les courbes multiples et passe par les points singuliers.