

L.-F. IBACH

**De quelques propriétés d'une famille
de polygones que l'on peut former
avec un polygone donné**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 226-233

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_226_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DE QUELQUES PROPRIÉTÉS D'UNE FAMILLE DE POLYGONES QUE L'ON PEUT FORMER AVEC UN POLYGONE DONNÉ ;

PAR M. L.-F. IBACH,

Étudiant à la Faculté des Sciences de Marseille.

I. Considérons un polygone dont les n sommets sont désignés par les n premiers nombres : $1, 2, 3, \dots, n$, et imaginons que ses côtés $12, 23, \dots$ soient divisés dans des rapports $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots$; la figure obtenue en joignant successivement les points de division sera un nouveau polygone, que nous désignerons, pour abréger, par polygone $(\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots)$ du premier et dont nous allons étudier quelques propriétés. Nous nous bornerons d'ailleurs à donner l'expression de la surface du polygone résultant, pour passer de suite à l'examen d'un cas particulier, celui du triangle, où nous rencontrerons quelques propriétés qui pourraient être dignes d'attention.

II. Expression de la surface du polygone résultant.

— Appelons a_{12} , a_{23} les sommets de ce dernier. Il est clair que la surface S est égale à la surface s du polygone donné moins la somme des triangles analogues à $(a_{12}, 2, a_{23})$. D'ailleurs, si $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ sont les coordonnées des sommets $1, 2, 3, \dots, x_{12}, y_{12}, \dots$ celles de $a_{12}, a_{23}, \dots$, nous aurons

$$x_{12} = \frac{\alpha_{12} x_1 + x_2}{\alpha_{12} - 1}, \quad y_{12} = \frac{\alpha_{12} y_1 + y_2}{\alpha_{12} - 1}, \bullet$$

les autres s'obtenant par une permutation circulaire. D'après cela, la surface du triangle $(a_{12}, 2, a_{23})$ sera donnée par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha_{12} x_1 + x_2}{\alpha_{12} - 1} & \frac{\alpha_{12} y_1 + y_2}{\alpha_{12} - 1} & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \frac{\alpha_{23} x_2 + x_3}{\alpha_{23} - 1} & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Or, ce dernier se réduit à $\frac{\alpha_{12}(123)}{(\alpha_{12} - 1)(\alpha_{23} - 1)}$, où (123) représente la surface du triangle formé par ces trois sommets. Il en résulte que nous avons

$$S = s - \sum_1^n \frac{\alpha_{12}(123)}{(\alpha_{12} - 1)(\alpha_{23} - 1)},$$

le signe $\sum_1^n$ indiquant qu'il faut permuter les indices n fois, afin de faire le tour du polygone.

III. Expression de la surface du triangle résultant.

— Dans le cas particulier du triangle, la formule précédente devient

$$S = s - \frac{\alpha_{12}(123)}{(\alpha_{12} - 1)(\alpha_{23} - 1)} - \frac{\alpha_{23}(231)}{(\alpha_{23} - 1)(\alpha_{31} - 1)} - \frac{\alpha_{31}(312)}{(\alpha_{31} - 1)(\alpha_{12} - 1)},$$

et, en remarquant que $(123), (231), (312)$ ne sont autre

chose que s ,

$$(1) \quad S = s \frac{\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + 1}{(\alpha_{12} + 1)(\alpha_{23} + 1)(\alpha_{31} + 1)}.$$

Lorsque les côtés sont divisés dans le même rapport α ,

$$S = s \frac{\alpha^3 + 1}{(\alpha + 1)^3}.$$

La formule (1) montre que *la surface du résultant est proportionnelle à celle du triangle donné*. De plus, comme elle est symétrique en α_{12} , α_{23} , α_{31} , elle indique que tous les triangles résultants que l'on pourra former avec cette série de rapports, en changeant l'ordre de division, sont équivalents; par suite :

THÉOREME I. — *Les résultants obtenus en permutant sur les côtés la même série de rapports sont équivalents.*

IV. La formule (1) montre aussi que, pour que le rapport $\frac{S}{s}$ soit un nombre donné A , on doit avoir

$$(\alpha_{12} + 1)(\alpha_{23} + 1)(\alpha_{31} + 1) = A(\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + 1),$$

et cela indique que, deux des rapports étant fixés, il sera toujours possible de déterminer le troisième, pour que la condition ci-dessus soit remplie. En particulier, la condition, pour que le résultant $(\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31})$ soit équivalent au triangle fondamental, sera

$$\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31} = -(\alpha_{12} \alpha_{23} + \alpha_{23} \alpha_{31} + \alpha_{31} \alpha_{12}),$$

c'est-à-dire qu'il faut que la somme des rapports soit égale et de signe contraire à la somme de leurs produits deux à deux. En d'autres termes, tout faisceau de racines de l'équation

$$x^3 + ax^2 + ax + b = 0,$$

dans laquelle a et b sont complètement arbitraires, pourra former une série de rapports, tels que le triangle résultant correspondant soit équivalent au triangle fondamental.

V. Considérons deux triangles T et T' de surfaces s et s' , et imaginons que l'on en forme les résultants $(\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31})$ et $(\alpha'_{12} \alpha'_{23} \alpha'_{31})$. Si S et S' sont les surfaces de ces derniers, nous aurons

$$S = s \frac{\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + 1}{(\alpha_{12} + 1)(\alpha_{23} + 1)(\alpha_{31} + 1)},$$

$$S' = s' \frac{\alpha'_{12} \alpha'_{23} \alpha'_{31} + 1}{(\alpha'_{12} + 1)(\alpha'_{23} + 1)(\alpha'_{31} + 1)}.$$

Par suite

$$\frac{S}{S'} = \frac{s}{s'} \frac{\frac{\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + 1}{(\alpha_{12} + 1)(\alpha_{23} + 1) \dots}}{\frac{\alpha'_{12} \alpha'_{23} \alpha'_{31} + 1}{(\alpha'_{12} + 1) \dots}}.$$

Supposons maintenant que $\alpha'_{12} = \alpha_{12}$, $\alpha'_{23} = \alpha_{23}$, ..., c'est-à-dire que l'on prenne pour les deux triangles la même série de rapports; nous voyons facilement que :

THÉOREME II. — *Les surfaces des résultants correspondant à une même série de rapports de deux triangles sont entre elles comme ceux de ces derniers, et, en particulier :*

Les résultants correspondant à la même série de rapports de deux triangles équivalents sont équivalents aussi.

VI. Si l'on a en même temps $S = s$, $S' = s'$, c'est-à-dire si les résultants sont équivalents au triangle correspondant, l'équation (3) devient

$$\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + (\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31} + \alpha'_{12} \alpha_{23} + \alpha_{23} \alpha'_{31} + \alpha_{31} \alpha_{12})$$

$$= \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 + (\alpha'_{12} + \alpha'_{23} + \alpha'_{31} + \alpha'_{12} \alpha'_{23} \dots).$$

Or, d'après (IV), le second terme du premier membre, ainsi que celui du second membre, sont identiquement nuls : il reste donc

$$\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} = \alpha'_{12} \alpha'_{23} \alpha'_{31},$$

qui s'énonce ainsi :

THÉOREME. — *Lorsque le résultant est équivalent au triangle de base, le produit des rapports est un nombre constant quel que soit le triangle de base que l'on considère.*

VII. Considérons maintenant n triangles $T_1, T_2, \dots$ dont les surfaces sont $S_1, S_2, \dots, S_n$, et imaginons que l'on prenne les résultants de ces triangles en conservant pour tous la même série de rapports; si $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ sont alors les surfaces de ces résultants, nous aurons

$$\sigma_1 = \gamma S_1,$$

$$\sigma_2 = \gamma S_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\sigma_n = \gamma S_n;$$

ajoutant,

$$\Sigma \sigma_1 = \Sigma \gamma S_1 = \gamma \Sigma S_1.$$

Si donc on considère un triangle équivalent à la somme des triangles donnés et que l'on forme le résultant de ce triangle, en prenant les mêmes rapports, celui-ci sera équivalent à la somme des résultants formés avec chaque triangle.

VIII. *Des triangles résultants de divers ordres.* — Demême que nous avons considéré le triangle $(\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots)$ résultant d'un triangle donné, nous pouvons former le résultant de ce nouveau triangle avec une série de rapports $(\alpha'_{12}, \alpha'_{23}, \alpha'_{31})$: ce sera alors un résultant du second ordre

du triangle donné. En continuant de la même manière, on obtiendra, après n opérations, un triangle qui sera un résultant du premier ordre par rapport au $(n-1)^{\text{ième}}$ et du $n^{\text{ième}}$ ordre par rapport au triangle donné. La série de rapports changeant toutes les fois, nous nous proposons de résoudre le problème suivant :

IX. *Trouver l'expression générale de la surface d'un résultant du $n^{\text{ième}}$ ordre.*

Soient s la surface du triangle donné, et $S_1, S_2, \dots, S_n$ les surfaces des résultants successifs. Nous avons, en appliquant la formule (1),

$$\begin{aligned} S_1 &= s \frac{\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + 1}{(\alpha_{12} + 1)(\alpha_{23} + 1)(\alpha_{31} + 1)}, \\ S_2 &= S_1 \frac{\alpha'_{12} \alpha'_{23} \alpha'_{31} + 1}{(\alpha'_{12} + 1)(\alpha'_{23} + 1)(\alpha'_{31} + 1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= S_{n-1} \frac{\alpha''_{12} \alpha''_{23} \alpha''_{31} + 1}{(\alpha''_{12} + 1)(\alpha''_{23} + 1)(\alpha''_{31} + 1)}. \end{aligned}$$

Multipliant ces égalités membre à membre, pour éliminer $S_1, \dots, S_{n-1}$, nous avons

$$\begin{aligned} S_n &= s \frac{\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + 1}{(\alpha_{12} + 1)(\alpha_{23} + 1)(\alpha_{31} + 1)} \frac{\alpha'_{12} \alpha'_{23} \alpha'_{31} + 1}{(\alpha'_{12} + 1) \dots} \\ &\times \frac{\alpha''_{12} \alpha''_{23} \alpha''_{31} + 1}{(\alpha''_{12} + 1) \dots} \dots \frac{\alpha^{n-1}_{12} \alpha^{n-1}_{23} \alpha^{n-1}_{31} + 1}{(\alpha^{n-1}_{12} + 1)(\alpha^{n-1}_{23} + 1) \dots}. \end{aligned}$$

Lorsque, dans la formation des résultants successifs, on a la même série de rapports, la formule devient

$$S_n = s \left[\frac{\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + 1}{(\alpha_{12} + 1)(\alpha_{23} + 1)(\alpha_{31} + 1)} \right]^n,$$

et enfin, lorsque les côtés sont tous divisés dans le même rapport α_1 ,

$$S_n = \left[\frac{\alpha_1^3 + 1}{(\alpha_1 + 1)^3} \right]^n.$$

X. Ces expressions montrent que les résultants d'ordre quelconque jouissent des mêmes propriétés que ceux du second ordre et leur sont absolument analogues. Ainsi, on a, comme précédemment :

Les résultants d'ordre quelconque de deux triangles correspondant à la même série de rapports sont entre eux comme les surfaces de ces triangles.

En particulier, ils sont équivalents si les deux premiers le sont.

XI. Les résultats précédents montrent de plus que les résultants successifs vont, en général, en diminuant; nous pouvons donc chercher :

La limite vers laquelle tend la somme des n premiers résultants d'un triangle donné, lorsque n tend vers l'infini.

Pour simplifier, nous supposerons que l'on conserve la même série de rapports; nous aurons alors

$$\begin{aligned} S_1 &= \gamma s, \\ S_2 &= \gamma^2 s, \\ S_3 &= \gamma^3 s, \\ &\dots\dots\dots, \\ S_n &= \gamma^n s. \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre,

$$\sum_1^n S = \gamma s + \gamma^2 s + \dots = \gamma s(1 + \gamma + \dots + \gamma^{n-1}),$$

c'est-à-dire

$$\sum_1^n S = \gamma s \frac{\gamma^n - 1}{\gamma - 1}.$$

Si nous faisons tendre n vers l'infini, la somme tend vers la limite cherchée σ , et nous avons

$$\sigma = \frac{\gamma s}{1 - \gamma}.$$

XI. On peut appliquer à l'étude précédente la méthode des polaires réciproques. Considérons, à cet effet, un triangle (123) , son résultant $(\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31})$ et une conique auxiliaire. Au triangle (123) en correspondra un autre, et aux sommets du résultant, divisant les côtés $12, 23, 31$ dans des rapports $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$, correspondront trois droites passant par les sommets du triangle polaire et partageant les angles correspondants en des parties dont le rapport des sinus sera $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$. Au triangle résultant correspondra donc le triangle formé par ces droites, et comme la surface de ce résultant est donnée par une expression $S = \gamma s$, s désignant la surface du triangle donné, la surface de celui qui est formé par les trois droites ci-dessus sera donnée aussi par une expression de la forme $\Sigma = \gamma' \sigma$, σ étant la surface du triangle polaire de (123) . Toutes les propriétés des résultants s'appliquent donc à ces derniers. De l'étude précédente, il résulte, par suite, les deux faits assez singuliers que voici :

Si l'on prend, sur les côtés d'un triangle, trois points quelconques, ou si l'on mène par les sommets trois droites aussi quelconques, les surfaces de ces triangles sont proportionnelles à celle du premier et, par suite, proportionnelles entre elles.