

MAURICE D'OCAGNE

Addition à une note sur un mode de détermination des courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 189-192

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__189_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**ADDITION A UNE NOTE SUR UN MODE DE DÉTERMINATION
DES COURBES PLANES ⁽¹⁾;**

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,

Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Soit la courbe

$$y = F(x).$$

En chaque point de cette courbe, portons sur la tangente, dans un sens déterminé, la longueur

$$l = \varphi(s),$$

s étant l'arc compté sur la courbe entre le point considéré et une origine fixe.

L'extrémité de la tangente décrit une courbe dont la normale coupe la normale à la première à une distance δ du centre de courbure de celle-ci. On a démontré, dans la Note citée, que

$$\delta = \rho \varphi'(s),$$

ρ étant le rayon de courbure de la courbe donnée.

Supposons maintenant la longueur l donnée en fonction de l'abscisse

$$l = \psi(x),$$

s et x étant liés par la relation

$$s = f(x).$$

On a

$$\varphi(s) = \psi(x).$$

(¹) *Nouv. Ann.*, 3^e série, t. I, p. 40.

(1902)

Dérivons par rapport à x

$$\varphi'(s)f'(x) = \psi'(x).$$

D'ailleurs, de la relation

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

on tire

$$f'(x) = \sqrt{1 + F'(x)^2}.$$

Par suite,

$$\varphi'(s) = \frac{\psi'(x)}{\sqrt{1 + F'(x)^2}}$$

et

$$\delta = \frac{\rho \psi'(x)}{\sqrt{1 + F'(x)^2}}.$$

Si α est l'angle de la tangente considérée avec l'axe des x , on a

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + F'(x)^2}}.$$

L'expression précédente peut donc s'écrire

$$\delta = \psi'(x) \rho \cos \alpha;$$

$\rho \cos \alpha$ est la projection du rayon de courbure sur l'axe des y .

En particulier, si l'on porte sur chaque tangente une longueur égale à l'abscisse du point de contact, on a

$$\delta = \rho \cos \alpha.$$

On peut aussi modifier l'expression de δ à l'aide de la relation

$$\rho = \frac{[1 + F'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{F''(x)}.$$

Cela donne

$$\delta = \frac{\psi'(x)[1 + F'(x)^2]}{F''(x)}.$$

On peut se proposer de déterminer la fonction ψ de

façon que la longueur δ soit égale à une constante k . On a, dans ce cas,

$$\psi'(x) = \frac{k F''(x)}{1 + F'(x)^2},$$

d'où, en intégrant,

$$l = \psi(x) = k \operatorname{arc tang} F'(x) + C,$$

ou, si α est l'angle de la tangente avec l'axe des x ,

$$l = k\alpha + C;$$

d'où ce théorème :

Si, sur les tangentes à une courbe plane, on porte des longueurs proportionnelles aux angles que font ces tangentes avec une même droite du plan, la normale à la courbe ainsi obtenue coupe la normale à la première courbe à une distance constante du centre de courbure de celle-ci.

Remarquons que le centre de courbure E à la courbe en question (P) s'obtient très facilement si l'on connaît le centre de courbure C_1 de la développée de la courbe (M) donnée.

En effet, la normale PD coupant, d'après ce qui vient d'être démontré, la normale MC à une distance constante du centre de courbure C , la normale à la courbe décrite par le point D passe par le centre de courbure C_1 de la développée.

Cela posé, on a, entre les déplacements infiniment petits correspondants des points M , P , D , les relations

$$\frac{d(M)}{d(P)} = \frac{MC}{PD}, \quad \frac{d(P)}{d(D)} = \frac{PE}{D\delta}, \quad \frac{d(D)}{d(M)} = \frac{DC_1}{MC},$$

$E\delta$ étant la normale à l'enveloppe de PD .

D'où, en faisant le produit,

$$\frac{PE \times DC_1}{PD \times D\delta} = 1$$

ou

$$\frac{PE}{D\hat{o}} = \frac{PD}{DC_1}.$$

Ce qui conduit à la construction suivante :

Porter $DP' = PD$; par le milieu μ de PD , tirer $\mu\alpha$ parallèle à C_1P' ; abaisser la perpendiculaire $\alpha\beta$ sur PD ; porter $\alpha\gamma = \beta\alpha$; $\mu\gamma$ coupe C_1D en $\hat{o}$; le pied E de la perpendiculaire abaissée de $\hat{o}$ sur PD est le centre de courbure cherché.

En effet, tirons $\hat{o}\hat{o}'$ et $\gamma'\mu$ parallèles à $\mu\alpha$; puisque $\alpha\gamma = \beta\alpha$, on a $\mu\beta = \gamma'\mu$; par suite, $\hat{o}'\mu = \mu E$, et, comme μ est le milieu de PD , $D\hat{o}' = PE$; d'ailleurs, $\mu\alpha$ étant parallèle à C_1P' ,

$$\frac{D\hat{o}'}{D\hat{o}} = \frac{P'D}{DC_1}.$$

Donc

$$\frac{PE}{D\hat{o}} = \frac{PD}{DC_1}.$$

Par suite, le point E ainsi obtenu répond bien à la question.