

MAURICE D'OCAGNE

Étude sur un mode de détermination des courbes planes. Application cinématique

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1
(1882), p. 40-45

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__40_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

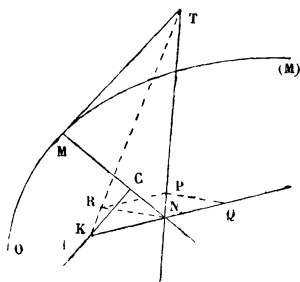
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE SUR UN MODE DE DÉTERMINATION DES COURBES PLANES. APPLICATION CINÉMATIQUE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève de l'École Polytechnique.

1. Sur une courbe quelconque (M) tracée dans un plan, prenons un point fixe O (*fig. 1*). Imaginons un

Fig. 1.



point mobile M se déplaçant d'une façon continue sur la courbe (M), à partir du point O. Pour chaque position du point M tirons la tangente à la courbe (M) et portons sur cette tangente une longueur $MT = l$, fonction de la longueur s de l'arc OM :

$$(1) \quad l = F(s).$$

Nous porterons cette longueur dans le sens du déplacement du point M, ou en sens contraire, suivant qu'elle sera affectée du signe + ou du signe —. Le lieu du point T sera une certaine courbe (T), que nous allons étudier.

2. Voyons d'abord comment, connaissant le centre

de courbure en chaque point de la courbe (M), on peut construire la normale à la courbe (T).

Soient $d\theta$ l'angle de contingence de la courbe (M) au point M considéré, C le centre de courbure en ce point, N le point où la normale TN cherchée coupe MC.

Nous avons

$$\frac{dl}{d\theta} = NC.$$

Or

$$d\theta = \frac{ds}{MC};$$

par suite,

$$\frac{dl}{ds} = NC,$$

ou

$$\frac{dl}{ds} = \frac{NC}{MC},$$

ou encore

$$(2) \quad \frac{NC}{MC} = F'(s).$$

Le point N est ainsi déterminé, et par suite la normale TN.

Remarquons que, dans le cas où l est constant, $F'(s)$ étant nul, les points N et C se confondent, ce qu'il était facile de voir *a priori*.

Il est aussi assez intéressant de remarquer que, si l'on représente les variations de la fonction $l = F(s)$ dans un système de deux axes rectangulaires, les s étant portés en abscisses et les l en ordonnées, le rapport $\frac{NC}{MC}$, égal à $F'(s)$, sera donné par le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe représentative.

3. Le rayon de courbure $MC = R$ de la courbe (M) est une fonction de l'arc s :

$$R = \varphi(s).$$

Nous allons voir comment, dans le cas où l'on connaît la nature de cette fonction, on peut construire le centre de courbure de la courbe (T).

Soit I le centre de courbure actuellement inconnu de la développée de la courbe (M) au point C. L'angle de contingence de cette courbe est aussi $d\theta$. Nous avons

$$\frac{d \cdot MC}{d\theta} = CI$$

ou

$$\frac{dR}{ds} = CI, \\ R$$

c'est-à-dire

$$\frac{CI}{R} = \varphi'(s).$$

Le point I est ainsi défini. Nous allons maintenant déterminer la normale NK à la courbe décrite par le point N. Pour cela, remarquons que

$$\frac{d \cdot NC}{d\theta} = KI.$$

Mais nous avons vu que

$$\frac{dl}{d\theta} = NC;$$

donc

$$\frac{dNC}{dl} = \frac{KI}{NC}.$$

Or, d'après (2),

$$NC = MC \cdot F'(s) = \varphi(s) F'(s).$$

La relation précédente devient donc

$$\frac{KI}{NC} = \frac{\varphi'(s)F'(s) + \varphi(s)F''(s)}{F'(s)}.$$

Le point K est ainsi déterminé, et par suite la normale NK.

Nous pouvons maintenant chercher le centre de courbure P de la courbe (T) au point T, c'est-à-dire le point où TN touche son enveloppe.

En effet, en appelant Q le point de rencontre de NK et de la perpendiculaire à TN au point P cherché, nous avons, entre les arcs infiniment petits ds , ds_1 , ds_2 décrits simultanément par les points M, N, T, les relations suivantes :

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{MC}{NK}, \quad \frac{ds_1}{ds_2} = \frac{NQ}{TP}, \quad \frac{ds_2}{ds} = \frac{TN}{MC}.$$

Multipliant ces trois relations membre à membre, nous avons

$$1 = \frac{NQ \cdot TN}{NK \cdot TP}$$

ou

$$\frac{TN}{NK} = \frac{TP}{NQ}.$$

Or, par le point P tirons, parallèlement à NK, PR qui coupe TK en R; nous avons

$$\frac{TN}{NK} = \frac{TP}{PR}.$$

Par suite,

$$PR = NQ.$$

Donc la figure PQNR est un parallélogramme : RN est parallèle à PQ, et, par conséquent, perpendiculaire à TN.

La construction du point P sera donc la suivante : après avoir déterminé, comme nous avons vu, le point I, puis le point K, on tire TK, on élève à TN en N la perpendiculaire NR qui coupe TK en R; par R on mène, parallèlement à KN, RP qui coupe TN en P; P est le centre de courbure demandé.

(45)

Les angles MCV et VNV₁ sont donc égaux, ce qui détermine la vitesse du point V.

Nous allons chercher les composantes de cette vitesse le long de MV et de la perpendiculaire VH à MV.

La similitude des triangles MVN et HV₁V donne

$$\frac{v_1}{VN} = \frac{VH}{MV} = \frac{V_1H}{MN}$$

ou, puisque $\frac{v_1}{VN} = \frac{v}{R}$,

$$\frac{v}{R} = \frac{VH}{v} = \frac{V_1H}{R \left(1 + \frac{dv}{ds} \right)},$$

d'où

$$VH = \frac{v^2}{R}$$

et

$$V_1H = v + v \frac{dv}{ds}.$$

Or

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dv}{dt} \frac{1}{v},$$

donc

$$V_1H = v + \frac{dv}{dt},$$

c'est-à-dire que :

1° La composante VH est égale à l'accélération centripète du point M.

2° La composante V₁H est égale à la somme de la vitesse et de l'accélération tangentielle du point M.

Portons la longueur V₁I = VM ; nous aurons

$$HI = \frac{dv}{dt}.$$

Puisque HI est égale à l'accélération tangentielle et VH à l'accélération centripète du point M, VI sera, en grandeur et direction, l'accélération totale de ce point.