

Composition mathématique pour l'admission à l'École polytechnique en 1882. Solution géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1
(1882), p. 351-356

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__351_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE
POLYTECHNIQUE EN 1882. SOLUTION GÉOMÉTRIQUE;**

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

*On donne deux cercles se coupant aux points a et b .
Une conique quelconque, passant par ces points et*

tangente aux deux cercles, rencontre l'hyperbole équilatère, qui a ces points pour sommets, en deux autres points c et d :

1° *Démontrer que la droite cd passe par un des centres de similitude des deux cercles donnés ;*

2° *Si l'on considère toutes les coniques qui, passant par a et b, sont tangentes aux deux cercles, démontrer que le lieu de leurs centres se compose de deux circonférences de cercle E et F ;*

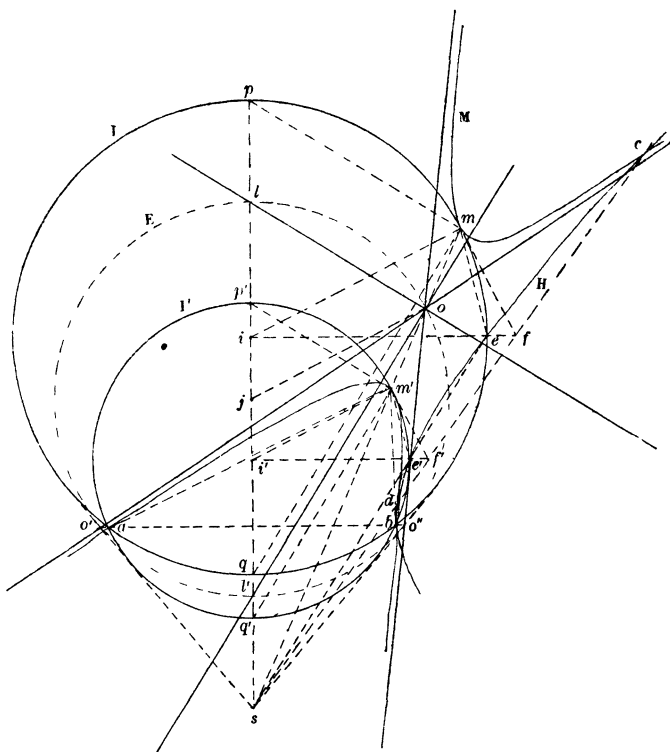
3° *Soit une conique satisfaisant à la question et ayant son centre sur l'une des circonférences E ou F ; démontrer que les asymptotes de cette conique rencontrent cette circonférence en deux points fixes situés sur l'axe radical des deux cercles donnés.*

Soient I et I' les circonférences données qui se coupent aux points a et b ; s le centre de similitude externe de ces circonférences et s' l'autre centre de similitude. Prenons une conique M passant par a et b et tangente à I et I'. Soient m, m' les points où elle touche ces circonférences. On sait que la tangente en m à la circonférence I et la corde ab sont également inclinées sur les axes de M. Comme ceci est vrai pour la tangente en m' à I', il en résulte que les tangentes en m et m' aux circonférences données sont parallèles entre elles. La droite mm' passe alors par le centre de similitude s.

Les circonférences I et I' ayant deux centres de similitude, il y a deux séries de coniques satisfaisant à la question, c'est-à-dire passant par les points a et b et tangentes aux circonférences données. Nous désignerons par M, les coniques pour lesquelles les cordes de contact, telles que mm', passent par s ; et par M_{s'} les autres coniques (1).

(1) On voit facilement que les coniques M, sont des hyperboles et que les coniques M_{s'}, sont des ellipses.

L'hyperbole équilatère H , dont les sommets sont a et b , coupe I aux extrémités du diamètre de cette circonférence parallèle à ab ⁽¹⁾. De même pour I' . Appelons e et e' les points où l'une des branches de H rencontre I et



I' . Il résulte de la propriété que nous venons de rappeler que la droite ee' passe par s .

Ceci va nous permettre de démontrer simplement la première partie de la question proposée.

(¹) Nous supposons démontrée cette propriété.

Les trois coniques I, M, H ayant une corde commune ab se coupent deux à deux suivant des cordes qui passent par un même point; I et H ont pour corde commune, en dehors de ab , la parallèle ef à ab . De même I et M pour corde commune la tangente mf à ces courbes.

Le point f , où cette tangente rencontre ef , appartient alors à la droite cd qui est la corde commune à H et M. De même, en prenant les trois courbes I', M, H, on trouve un point f' de cd .

Mais les triangles mef , $m'e'f'$ sont semblables et les droites mm' , ee' passent par s . Il en est alors de même de ff' . La droite ff' , c'est-à-dire cd , passe donc par s .

2° Appelons o le milieu de mm' ; ce point est le centre de la conique M. Menons du point o la droite oj parallèlement au rayon im de I.

Le point j est alors le milieu du segment ii' compris entre les centres des circonférences I et I'.

Le point j est, par suite, le même pour toutes les coniques satisfaisant à la question. Le segment oj a pour longueur la demi-somme des longueurs des rayons des circonférences I et I'. Les points tels que o appartiennent donc à une circonférence de cercle E.

S'il s'agit de coniques M' , leurs centres sont sur une circonférence F concentrique à E et dont le rayon est la demi-différence des rayons de I et de I'. On peut donc dire :

Toutes les coniques qui, passant par a et b , sont tangentes aux deux circonférences I et I', ont leurs centres sur deux circonférences concentriques E et F. Les rayons de ces dernières circonférences sont égaux, l'un à la demi-somme, l'autre à la demi-différence des rayons des circonférences I, I'.

3° Les axes de la conique M sont parallèles aux bissec-

trices des angles que font entre elles les cordes $m'a, m'b$. Ces axes sont alors parallèles aux droites $m'p', m'q'$ qui joignent le point m' aux extrémités du diamètre $p'q'$, perpendiculaire à ab .

Ces axes sont aussi parallèles aux droites analogues mp, mq , et, comme ils passent par o , on voit que :

Les axes de M sont les droites ol, ol' qui joignent le centre o aux points l et l' qui sont respectivement les milieux des segments pp', qq' .

Si l'on prend des coniques M_i , les points l et l' sont fixes. Donc :

Toutes les coniques M_i ont pour axes des droites passant par les mêmes deux points l et l' .

L'angle lol' étant droit, nous retrouvons que :

Le lieu des centres des coniques M_i est une circonférence E décrite sur ll' comme diamètre.

Parmi les positions que peut occuper le centre o , il y en a o', o'' qui sont respectivement les milieux des segments compris sur les tangentes communes à I et I' entre les points de contact de ces droites.

La circonférence E coupe donc la droite ab aux points o' et o'' . On voit aussi qu'elle est tangente en ces points aux tangentes communes à I et I' .

Cherchons les asymptotes de M . Ces droites forment avec la corde commune ab un triangle qu'il s'agit de construire. Dans ce triangle, nous connaissons la médiane qui part du point o , puisqu'elle aboutit au point g milieu de ab ; nous connaissons aussi la bissectrice de l'angle en o , qui est l'axe ol' , puisque les asymptotes de M sont également inclinées sur cet axe.

Cette médiane et cette bissectrice étant connues, on a

tout de suite la circonférence circonscrite au triangle. Cette circonférence n'est autre que E. Les asymptotes demandées sont alors les droites oo' , oo'' . On voit qu'elles passent par deux points fixes de l'axe radical ab . Ainsi :

Les asymptotes des coniques M_i passent par deux points fixes situés sur l'axe radical des circonférences données.

Comme ces points fixes appartiennent à E, ainsi que le point de rencontre o des asymptotes, l'angle compris entre ces droites est constant, quelle que soit la conique M_i ; par suite :

Les coniques M_i sont semblables entre elles.

Ceci s'étend évidemment aux coniques M_r .

On peut encore arriver à ce résultat en remarquant que les axes de M partagent la normale im à cette courbe en segments dont le rapport est constant, quelle que soit la position de m sur I.

Les trois parties de la question proposée étant ainsi démontrées, j'énoncerai en outre les propriétés suivantes :

Les axes d'une conique M_i sont rencontrés par la normale, telle que im , en des points qui appartiennent à deux circonférences concentriques à I et qui sont tangentes à E.

Les extrémités des diamètres des coniques M_i , respectivement parallèles aux tangentes telles que mf , appartiennent à une circonférence concentrique à F.

Les droites oo' , oo'' interceptent, sur la tangente mf à I, un segment, qui est de grandeur constante, quelle que soit la position de m sur I.
