

Généralisation d'une propriété de la surface de l'onde

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1 (1882), p. 29-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__29_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉNÉRALISATION D'UNE PROPRIÉTÉ DE LA SURFACE DE L'ONDE;

PAR UN ABONNÉ.

On sait, comme l'a fait voir M. Mac-Cullagh, que si par le centre o d'un ellipsoïde on mène un plan ω contenant la normale du point $m(x, y, z)$ et, dans ce plan, une droite $o\mu$ égale et perpendiculaire à om , la surface de l'onde est le lieu des points $\mu(\alpha, \beta, \gamma)$, et les normales aux points correspondants m et μ sont dans le même plan. Il est facile de reconnaître que cette dernière propriété subsiste pour le cas plus général où l'on suppose

$$om = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = f(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}) = f(u).$$

En effet, la recherche du lieu se ramène à l'élimination de x, y, z entre les équations

$$\begin{aligned} & px^2 + qy^2 + rz^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = f^2(u), \\ (1) \quad & \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \\ (2) \quad & \alpha(q-r)yz + \beta(r-p)zx + \gamma(p-q)xy = 0. \end{aligned}$$

Remplaçons les deux premières par celle-ci

$$Px^2 + Qy^2 + Rz^2 = 0,$$

où l'on a fait, pour abrégér,

$$P = pf^2(u) - 1, \quad Q = qf^2(u) - 1, \quad R = rf^2(u) - 1.$$

Comme on peut l'écrire

$$Px.x + Qy.y + Rz.z = 0,$$

on en déduit, à l'aide de l'équation (1),

$$\begin{aligned} \frac{x}{\beta R z - \gamma Q y} &= \frac{y}{\gamma P x - \alpha R z} = \frac{z}{\alpha Q y - \beta P x} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{f^2[\alpha(q-r)yz + \beta(r-p)zx + \gamma(p-q)xy]}, \end{aligned}$$

et par suite

$$(3) \quad \frac{\alpha}{Px} = \frac{\beta}{Qy} = \frac{\gamma}{Rz},$$

ou bien

$$\frac{x}{\left(\frac{\alpha}{P}\right)} = \frac{y}{\left(\frac{\beta}{Q}\right)} = \frac{z}{\left(\frac{\gamma}{R}\right)} = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\frac{\alpha^2}{P} + \frac{\beta^2}{Q} + \frac{\gamma^2}{R}},$$

ce qui donne, pour l'équation du lieu,

$$(4) \quad \frac{\alpha^2}{P} + \frac{\beta^2}{Q} + \frac{\gamma^2}{R} = 0,$$

équation tout à fait semblable à celle de la surface de l'onde.

Pour trouver la direction de la normale au point μ , désignons par $F(\alpha, \beta, \gamma)$ le premier membre de cette équation; il en résulte

$$\frac{1}{2} \frac{dF}{d\alpha} = \frac{\alpha}{P} - \frac{\alpha f f'}{u} \left(\frac{p x^2}{P} + \frac{q \beta^2}{Q} + \frac{r \gamma^2}{R} \right).$$

Soit ω la valeur commune des rapports (3); elle est égale à

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{P x \alpha + Q y \beta + R z \gamma} = \frac{u^2}{f^2 (p x \alpha + q y \beta + r z \gamma)},$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{2} \frac{dF}{d\alpha} = \omega \left(x - \alpha \frac{f f' \omega}{u} \right),$$

et semblablement

$$\frac{1}{2} \frac{dF}{d\beta} = \omega \left(y - \beta \frac{f f' \omega}{u} \right), \quad \frac{1}{2} \frac{dF}{d\gamma} = \omega \left(z - \gamma \frac{f f' \omega}{u} \right).$$

Or, ces trois demi-dérivées sont respectivement proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale au point μ ; les quantités $(q-r)yz$, $(r-p)zx$, $(p-q)xy$

le sont de même aux cosinus directeurs de l'axe du plan ϖ , et, comme l'expression

$$\begin{aligned} \left(x - \alpha \frac{ff'\omega}{u}\right)(q - r)yz + \left(y - \beta \frac{ff'\omega}{u}\right)(r - p)zx \\ + \left(z - \gamma \frac{ff'\omega}{u}\right)(p - q)xy \end{aligned}$$

est nulle, la normale au point μ est bien située dans le plan qui contient celle du point m .

Pour la surface de l'onde, M. Mac-Cullagh a démontré que ces normales se coupent à angle droit, mais cela n'a pas lieu généralement. En effet, l'expression

$$\begin{aligned} px \left(x - \alpha \frac{ff'\omega}{u}\right) + qy \left(y - \beta \frac{ff'\omega}{u}\right) \\ + rz \left(z - \gamma \frac{ff'\omega}{u}\right) = 1 - \frac{f'u}{f} \end{aligned}$$

ne s'annule que lorsqu'on a $f(u) = ku$, k désignant une constante.

On peut observer que la valeur absolue de ω représente le rapport des projections de op et de om sur le plan tangent à l'ellipsoïde.

Observons encore que l'élimination de x, y, z entre les équations du système

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \quad \alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 0, \\ px^2 + qy^2 + rz^2 = 0, \end{aligned}$$

plus général que celui qui donne l'équation (4), s'exécute aussi très simplement et conduit à la relation

$$(\alpha p \beta \gamma + \beta q \gamma \alpha + \gamma \alpha \beta)^2 = H(\alpha^2 q r + \beta^2 r p + \gamma^2 p q),$$

où

$$H = 2\alpha\beta\alpha\beta + 2\beta\gamma\beta\gamma + 2\gamma\alpha\gamma\alpha - \alpha^2\alpha^2 - \beta^2\beta^2 - \gamma^2\gamma^2.$$