

GAMBEY

**Solution de la question de mathématiques
spéciales proposée au concours
d'agrégation de 1879**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1
(1882), p. 245-254

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__245_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1879 ;**

PAR M. GAMBÉY,

Professeur au lycée de Saint-Étienne.

On donne un hyperboloïde à une nappe et un point A. On considère un parabololoïde circonscrit à l'hyperboloïde et tel que le plan P de la courbe de contact passe par le point A; soit M le point d'intersection de ce parabololoïde avec celui de ses diamètres qui passe par le point A; soit Q le point de rencontre du plan P avec la droite qui joint le point M au pôle du plan P par rapport à l'hyperboloïde.

Le plan P tournant autour du point A, on demande :

- 1° Le lieu du point M;*
- 2° Le lieu du point Q : ce second lieu est une surface du second degré S que l'on discutera en faisant varier la position du point A dans l'espace ;*
- 3° Le lieu des positions que doit occuper le point A pour que la surface S soit de révolution.*

L'hyperboloïde donné, rapporté à son centre et à ses axes, ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

si je transporte les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes, de manière que la nouvelle origine soit au point donné A (α, β, γ), l'équation précédente deviendra

$$(1) \quad \frac{(x + \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y + \beta)^2}{b^2} - \frac{(z + \gamma)^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Celle du plan P sera

$$lx + my + nz = 0,$$

l, m, n étant des paramètres arbitraires.

Si je désigne, pour abrégé, par S le premier membre de (1), l'équation d'une surface du second ordre, circonscrite à l'hyperboloïde suivant la courbe de contact déterminée par le plan P dans cet hyperboloïde, sera

$$\lambda S - (lx + my + nz)^2 = 0,$$

et, pour qu'elle représente un paraboloïde, on a la condition

$$\lambda^2(a^2l^2 + b^2m^2 - c^2n^2 - \lambda) = 0.$$

Le facteur λ^2 , égalé à zéro, donnerait un plan double. L'autre facteur donne

$$\lambda = a^2l^2 + b^2m^2 - c^2n^2,$$

et l'équation du paraboloïde devient alors

$$(2) \quad (a^2l^2 + b^2m^2 - c^2n^2)S - (lx + my + nz)^2 = 0.$$

I. *Lieu du point M.* — Les diamètres du paraboloïde (2) étant conjugués du plan P, celui qui passe en A a pour équations

$$(3) \quad \frac{\frac{x}{a^2}}{l} = \frac{\frac{y}{b^2}}{m} = -\frac{\frac{z}{c^2}}{n}.$$

Le lieu du point M où le diamètre (3) rencontre le paraboloïde (2) s'obtiendra en éliminant l, m et n entre les équations (2) et (3), ce qui se fait immédiatement en substituant à ces paramètres les quantités proportionnelles $\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, -\frac{z}{c^2}$.

L'équation obtenue se décompose en deux autres,

savoir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

$$\frac{2\alpha x}{a^2} + \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{2\gamma z}{c^2} + \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = 0.$$

La première représente le cône asymptote de l'hyperboloïde donné, transporté parallèlement à lui-même de manière que son sommet vienne en A. C'est une solution singulière correspondant au cas de $\lambda = 0$.

Le plan représenté par la seconde équation est parallèle au plan polaire du point A par rapport à l'hyperboloïde et se confond avec le plan tangent en A à cette surface, quand le point A est sur l'hyperboloïde.

Si le point A est situé au centre de l'hyperboloïde, ce deuxième lieu est rejeté à l'infini.

II. *Lieu du point Q.*— Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un des points M du lieu précédent, et x_1, y_1, z_1 celles du pôle du plan P par rapport à l'hyperboloïde donné.

Les équations de la droite qui joint ce pôle au point M sont

$$(4) \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Cette droite rencontre le plan qui a pour équation

$$(5) \quad lx + my + nz = 0$$

en un point qui appartient au lieu cherché.

Mais, si l'on identifie l'équation (5) avec celle du plan polaire du point (x_1, y_1, z_1) par rapport à l'hyperboloïde, on obtient les relations

$$(6) \quad \frac{x_1 + \alpha}{a^2 l} = \frac{y_1 + \beta}{b^2 m} = \frac{z_1 + \gamma}{c^2 n},$$

$$(7) \quad \frac{\alpha(x_1 + \alpha)}{a^2} + \frac{\beta(y_1 + \beta)}{b^2} - \frac{\gamma(z_1 + \gamma)}{c^2} - 1 = 0,$$

et l'on a en outre

$$(8) \quad \frac{x_0}{a^2 l} = \frac{\gamma_0}{b^2 m} = \frac{z_0}{c^2 n},$$

$$(9) \quad \frac{2\alpha x_0}{a^2} + \frac{2\beta \gamma_0}{b^2} - \frac{2\gamma z_0}{c^2} + k = 0,$$

en posant, pour abrégér,

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = k.$$

Il faut éliminer les coordonnées de M, celles du pôle du plan P et les rapports de deux des coefficients l, m, n au troisième, entre les équations numérotées de (4) à (9).

De (6) et (8) on déduit immédiatement

$$\frac{x_1 + \alpha}{x_0} = \frac{\gamma_1 + \beta}{\gamma_0} = \frac{z_1 + \gamma}{z_0},$$

ce qui exige, pour que les équations (7) et (9) soient compatibles, que l'on ait encore

$$2x_0 + k(x_1 + \alpha) = 0,$$

$$2\gamma_0 + k(\gamma_1 + \beta) = 0,$$

$$2z_0 + k(z_1 + \gamma) = 0.$$

Tirant de là les valeurs de x_1, γ_1, z_1 en fonction de x_0, γ_0, z_0 et substituant dans les équations (4), on en déduit, si l'on désigne par $\frac{1}{\mu}$ la valeur commune des trois rapports (4),

$$(10) \quad \begin{cases} x_0 = \frac{k}{k(\mu - 1) - 2} (\mu x + \alpha), \\ \gamma_0 = \frac{k}{k(\mu - 1) - 2} (\mu \gamma + \beta), \\ z_0 = \frac{k}{k(\mu - 1) - 2} (\mu z + \gamma). \end{cases}$$

D'autre part, si l'on substitue à l, m, n dans (5) les

quantités proportionnelles $\frac{x_0}{a^2}$, $\frac{\gamma_0}{b^2}$ et $\frac{z_0}{c^2}$, il vient

$$(11) \quad \frac{x x_0}{a^2} + \frac{\gamma \gamma_0}{b^2} - \frac{z z_0}{c^2} = 0.$$

Il ne reste plus qu'à porter dans (9) et (11) les valeurs (10) de x_0 , γ_0 , z_0 pour obtenir les deux équations suivantes

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2 \alpha x}{a^2} + \frac{2 \beta \gamma}{b^2} - \frac{2 \gamma z}{c^2} + k \right) \mu + k = 0, \\ & \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) \mu + \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta \gamma}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2} = 0, \end{aligned}$$

entre lesquelles μ s'élimine immédiatement. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta \gamma}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2} \right)^2 \\ & = \frac{k}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta \gamma}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Le lieu du point Q est donc une surface du second ordre. Cette surface passe par le point A et par la courbe d'intersection du cône

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

et du plan

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta \gamma}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2} + \frac{k}{2} = 0.$$

Elle se réduit à un plan double quand on a $k = 0$.

Nous supposons dans ce qui suit k différent de zéro.

Discussion. — L'équation développée du lieu du point Q peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2 \alpha^2}{a^2} - k \right) \frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{2 \beta^2}{b^2} - k \right) \frac{\gamma^2}{b^2} \\ & + \left(\frac{2 \gamma^2}{c^2} + k \right) \frac{z^2}{c^2} - \frac{4 \beta \gamma}{b^2 c^2} \gamma z \\ & - \frac{4 \gamma \alpha}{c^2 a^2} z x + \frac{4 \alpha \beta}{a^2 b^2} x \gamma + k \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta \gamma}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Les équations du centre se ramènent aisément à celles-ci

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = -\frac{k}{2(k+2)}.$$

Le centre de la surface S est donc situé sur la droite qui joint le point A au centre de l'hyperboloïde donné.

Supposons l'équation de S ramenée à la forme

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 + S_3 Z^2 = H,$$

et calculons le terme connu H. Nous obtiendrons facilement

$$H = \frac{k^2(k+1)}{4(k+2)}.$$

Il faut maintenant déterminer les signes des coefficients S_1, S_2, S_3 , qui sont, comme on sait, les racines de l'équation en S.

Prenons cette équation sous la forme connue

$$\frac{1}{B^2(S-a_1)} + \frac{1}{B'^2(S-b_1)} + \frac{1}{B''^2(S-c_1)} - \frac{1}{BB'B''} = 0,$$

où nous faisons

$$A - \frac{B'B''}{B} = a_1, \quad A' - \frac{B''B}{B'} = b_1 \quad \text{et} \quad A'' - \frac{BB'}{B''} = c_1.$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, nous avons

$$a_1 = -\frac{k}{a^2}, \quad b_1 = -\frac{k}{b^2}, \quad c_1 = \frac{k}{c^2},$$

et l'équation en S devient

$$(12) \quad \frac{\frac{\alpha^2}{a^4}}{S + \frac{k}{a^2}} + \frac{\frac{\beta^2}{b^4}}{S + \frac{k}{b^2}} + \frac{\frac{\gamma^2}{c^4}}{S - \frac{k}{c^2}} - \frac{1}{2} = 0.$$

Supposons $a^2 > b^2$ et distinguons les deux cas de $k > 0$ et $k < 0$.

1° $k > 0$. — En faisant varier S de $-\frac{k}{b^2} + \varepsilon$ à $-\frac{k}{a^2} - \varepsilon'$, ε et ε' étant des quantités très petites, le premier membre de l'équation (12) passe du positif au négatif en restant fini et continu; il y a donc une racine négative comprise entre $-\frac{k}{b^2}$ et $-\frac{k}{a^2}$. Si S varie ensuite de zéro à $\frac{k}{c^2} - \varepsilon''$, le premier membre de (12) varie de $\frac{k+2}{2k}$, quantité positive, jusqu'à une quantité négative; il y a donc une racine positive entre zéro et $\frac{k}{c^2}$. Enfin on s'assure aisément qu'il y a une autre racine positive supérieure à $\frac{k}{c^2}$. Comme le terme H est alors positif, la surface S est un *hyperboloïde à une nappe*.

2° $k < 0$. — Il y a une première racine entre $\frac{k}{c^2}$ et $-\frac{k}{a^2}$. Pour déterminer son signe, faisons $S = 0$. Le premier membre de (12) devient $\frac{k+2}{2k}$. Si l'on a

$$k + 2 < 0,$$

cette quantité étant alors positive, la racine considérée est négative. Il y a en outre une racine positive entre $-\frac{k}{a^2}$ et $-\frac{k}{b^2}$, et une autre, aussi positive, plus grande que $-\frac{k}{b^2}$. Cette dernière reste positive quel que soit le signe de $k + 2$. Donc, pour $k + 2 < 0$, les trois racines de l'équation en S sont positives, et comme alors H est aussi positif, la surface est un *ellipsoïde réel*.

Mais, pour $k + 2 > 0$, deux racines étant positives et l'autre négative, comme on a alors $H > 0$ si $k + 1 > 0$,

et $H < 0$ si $k + 1 < 0$, il en résulte que la surface est un *hyperboloïde à une nappe* si $k + 1 > 0$, et un *hyperboloïde à deux nappes* si $k + 1 < 0$.

Pour $k + 1 = 0$, la surface est un *cône réel*.

Il reste à examiner l'hypothèse $k + 2 = 0$.

Dans ce cas, le centre est à l'infini sur la droite

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{z}{\gamma}.$$

La surface est alors un parabolôïde.

Pour $z = 0$, le premier membre de l'équation de la surface S devient

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta \gamma}{b^2} \right)^2 = \frac{k}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} - \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta \gamma}{b^2} \right),$$

équation d'une ellipse dans l'hypothèse de $k = -2$.
Donc la surface est alors un *parabolôïde elliptique*.

Remarque. — Dans la discussion qui précède, la surface S se trouve rapportée à des axes de directions fixes, mais dont l'origine est variable : cela ne peut en rien changer la nature de la surface discutée.

Interprétation géométrique du résultat de la discussion. — Revenons aux axes primitifs de coordonnées par rapport auxquels nous regarderons α, β, γ comme des coordonnées courantes. La relation $k + 1 = 0$ représente alors le cône asymptote de l'hyperboloïde donné et la relation $k + 2 = 0$ son hyperboloïde conjugué.

Donc :

Si le point A est situé à l'extérieur du cône asymptote de l'hyperboloïde donné, la surface S est un *hyperboloïde à une nappe*;

Si ce point est sur le cône asymptote, la surface S est un *cône réel*;

S'il est situé à l'intérieur du cône asymptote, mais, par

rapport à l'hyperboloïde conjugué de l'hyperboloïde donné, dans la même région que le centre, la surface S est un *hyperboloïde à deux nappes*;

S'il se trouve sur l'hyperboloïde conjugué, la surface S est un *paraboloïde elliptique*;

Enfin, si le point A est, par rapport à l'hyperboloïde conjugué, dans la région où ne se trouve pas le centre, la surface S est un *ellipsoïde réel*.

Il a déjà été dit que, si le point A est sur l'hyperboloïde donné, la surface S est un plan double.

III. *Conditions pour que la surface S soit de révolution.* — Les trois quantités a_1, b_1, c_1 ne pouvant être égales que si $k = 0$, auquel cas elles sont nulles, il faut exprimer que deux des coefficients des rectangles des variables sont nuls à la fois. Cela arrivera pour $\gamma = 0$, par exemple. Mais on doit avoir en outre la relation

$$\frac{4\alpha^2\beta^2}{a^2b^2} = \left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) \frac{\alpha^2}{a^2} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{\beta^2}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right] \\ \times \left[- \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{\alpha^2}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right],$$

qui, abstraction faite d'un facteur constant, se décompose en deux, savoir

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La première rentre dans l'hypothèse $k = 0$. La seconde représente une conique dans le plan des $\alpha\beta$.

Les hypothèses $\beta = 0$ et $\alpha = 0$ donneraient deux autres coniques ayant pour équation dans leur plan

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = 0, \\ - \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = 0.$$

En supposant $a^2 > b^2$, nous aurons à distinguer les trois cas de

$$c^2 < b^2, \quad b^2 < c^2 < a^2, \quad a^2 < c^2.$$

1° $c^2 < b^2$. — Les coniques situées dans les plans des $\alpha\beta$ et des $\alpha\gamma$ sont des ellipses réelles, et celle qui est située dans le plan des $\beta\gamma$ est une hyperbole.

2° $b^2 < c^2 < a^2$. — Les trois coniques sont des hyperboles.

3° $a^2 < c^2$. — Les coniques situées dans les plans des $\alpha\beta$ et des $\beta\gamma$ sont des ellipses imaginaires; celle qui est située dans le plan des $\alpha\gamma$ est une hyperbole.

Note. — M. Gambey a également résolu la question de licence dont une solution a déjà paru (2^e série, t. XX, p. 57).