CH. BRISSE

Application des propriétés des polynômes homogènes à la discussion de l'équation en *S*

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 193-206

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__193_0>

APPLICATION DES PROPRIÉTÉS DES POLYNOMES HOMOGÈNES A LA DISCUSSION DE L'ÉQUATION EN S;

Par M. Ch. BRISSE.

λ, μ, ν désignant les trois angles formés par les axes des x, des y et des z, on sait que la fonction

$$\sigma = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu$$

est une somme de trois carrés positifs distincts, qui ne s'annule que pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, quand on suppose x, y et z réels.

Considérons la fonction à coefficients réels

$$\varphi = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx + 2\mathrm{B}''xy,$$

et cherchons pour quelles valeurs du paramètre S l'expression

$$\varphi - \mathrm{S}\sigma$$

se décompose en un produit de deux facteurs linéaires. On sait qu'il est nécessaire et suffisant que S soit l'une des racines de l'équation du troisième degré

$$\Delta(\mathrm{S}) = \begin{vmatrix} \mathrm{A}-\mathrm{S} & \mathrm{B}''-\mathrm{S}\cos\nu & \mathrm{B}'-\mathrm{S}\cos\mu \\ \mathrm{B}''-\mathrm{S}\cos\nu & \mathrm{A}'-\mathrm{S} & \mathrm{B}-\mathrm{S}\cos\lambda \\ \mathrm{B}'-\mathrm{S}\cos\mu & \mathrm{B}-\mathrm{S}\cos\lambda & \mathrm{A}''-\mathrm{S} \end{vmatrix} = 0,$$

dite *équation en* S.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION EN S.

1° *L'équation en* S *a ses racines réelles.* — Car, si elle avait une racine imaginaire $u + vi$, l'expression $\varphi - \mathrm{S}\sigma$, égale à $\varphi - u\sigma - iv\sigma$, serait à coefficients imaginaires, non identiquement nulle, et l'un, au moins, des deux facteurs auxquels elle est réductible, serait de la forme $P + Qi$, Q n'étant pas identiquement nul. On aurait donc l'identité

$$\varphi - u\sigma - iv\sigma = (P + Qi)R.$$

Mais, en substituant dans le second membre, pour x, y, z, un des systèmes de solutions des équations $P = 0$, $Q = 0$ autre que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on l'annulerait; on annulerait donc aussi le premier et par suite $v\sigma$, ce qui est absurde.

2° *Deux racines distinctes de l'équation en* S *donnent, pour* $\varphi - S\sigma$, *deux décompositions de nature distincte.* — S étant une racine réelle de l'équation en S, la fonction $\varphi - S\sigma$ à coefficients réels peut être ramenée à une somme algébrique de moins de trois carrés, c'est-à-dire à l'une des formes $P^2 + Q^2$, $P^2 - Q^2$, $-P^2 - Q^2$, P^2, $-Q^2$, 0, que nous appellerons des décompositions de nature distincte. Alors, S et S' étant deux racines distinctes de l'équation en S, je dis qu'on ne peut avoir, par exemple,

$$\varphi - S\sigma = P^2 + Q^2, \quad \varphi - S'\sigma = P'^2 + Q'^2;$$

car, en retranchant membre à membre, il en résulterait l'identité

$$(S' - S)\sigma = P^2 + Q^2 - P'^2 - Q'^2.$$

Or, en supposant $S' - S$ positif, et en substituant dans le second membre un des systèmes de solutions des équations $P = 0$, $Q = 0$ autre que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on l'annulerait ou on le rendrait négatif, ce qui est absurde.

Il est évidemment inutile de répéter la démonstration pour les formes suivantes, mais il est important de remarquer que, pour deux racines distinctes de l'équation en S, la forme P^2 ne peut coexister avec la forme P^2+Q^2 ou avec la forme P^2-Q^2, que la forme $-Q^2$ ne peut coexister avec la forme P^2-Q^2 ou avec la forme $-P^2-Q^2$, enfin que la forme o ne peut coexister avec aucune des précédentes. Pour me borner à un seul cas, je dis, par exemple, qu'on ne peut avoir

$$\varphi - S\sigma = P^2 - Q^2, \quad \varphi - S'\sigma = 0,$$

car il en résulterait

$$(S' - S)\sigma = P^2 - Q^2,$$

et la démonstration s'achèverait comme plus haut.

Cas où l'équation en S *a trois racines simples.*

Il résulte de là que, si les racines de l'équation en S sont toutes distinctes, les seules formes de décomposition possibles sont les trois premières P^2+Q^2, P^2-Q^2, $-P^2-Q^2$, et que chacune des racines S, S', S'' en donne une, de sorte que l'on a

$$\begin{aligned}
\varphi - S\sigma &= P^2 + Q^2,\\
\varphi - S'\sigma &= P'^2 - Q'^2,\\
\varphi - S''\sigma &= -P''^2 - Q''^2.
\end{aligned}$$

On en déduit les identités

$$\begin{aligned}
(S' - S)\sigma &= P^2 + Q^2 + Q'^2 - P'^2,\\
(S'' - S')\sigma &= P''^2 + Q''^2 + P'^2 - Q'^2,
\end{aligned}$$

et, en employant toujours le même mode de raisonnement, c'est-à-dire en posant $P' = 0$ dans la première et $Q' = 0$ dans la seconde, on en conclut

$$S < S' < S''.$$

Ainsi *la plus petite racine donne deux carrés positifs,* *la plus grande deux carrés négatifs, et la racine moyenne seule décompose* $\varphi - S\sigma$ *en un produit de deux facteurs réels distincts.*

La fonction $\varphi - S\sigma$ n'étant pas, dans ce cas, réductible à moins de deux carrés, *aucune des racines de l'équation en* S *n'annule tous les mineurs du second ordre de* $\Delta(S)$.

Cas où l'équation en S *a une racine double.*

Les racines d'une équation étant des fonctions continues de ses coefficients, pour que l'équation en S puisse avoir une racine double, il faut, ses racines étant préalablement distinctes, ou que S' devienne égal à S, ou que S' devienne égal à S'', c'est-à-dire que la racine moyenne devienne égale à l'une ou à l'autre des racines extrêmes. Dans le premier cas, les décompositions primitivement distinctes pour S et pour S' devront coïncider, c'est-à-dire que $\varphi - S\sigma = P^2 + Q^2$ et $\varphi - S'\sigma = P'^2 - Q'^2$ se réduiront à $\varphi - S'\sigma = P'^2$; dans le second cas, ce seront les décompositions

$$\varphi - S'\sigma = P'^2 - Q'^2 \quad \text{et} \quad \varphi - S''\sigma = - P''^2 - Q''^2,$$

qui se réduiront à $\varphi - S'\sigma = - Q'^2$.

Ainsi, *quand l'équation a une racine double, cette racine* S' *réduit la fonction* $\varphi - S'\sigma$ *à un seul carré; elle annule donc tous les mineurs du second ordre de* $\Delta(S)$.

Réciproquement, *une racine* S' *qui annule tous les mineurs du second ordre de* $\Delta(S)$ *est au moins double,* car elle réduit $\varphi - S'\sigma$ à un seul carré; ce que nous avons vu ne pouvoir arriver quand l'équation en S a ses racines distinctes.

Cas où l'équation en S *a une racine triple.*

L'équation en S ayant une racine double S', et la seconde racine S ou S'' étant distincte de S', on a

$$\varphi - S'\sigma = P'^2 \quad \text{avec} \quad \varphi - S''\sigma = - P''^2 - Q''^2,$$

ou bien

$$\varphi - S\sigma = P^2 + Q^2 \quad \text{avec} \quad \varphi - S'\sigma = - Q'^2.$$

Si les trois racines deviennent égales, ces décompositions primitivement distinctes devront coïncider et, par suite, se réduire identiquement à zéro.

Ainsi, *quand l'équation a une racine triple, cette racine réduit la fonction* $\varphi - S\sigma$ *à zéro; elle annule donc tous les mineurs du premier ordre de* $\Delta(S)$.

Réciproquement, *une racine qui annule tous les mineurs du premier ordre de* $\Delta(S)$ *est triple*, car elle réduit $\varphi - S\sigma$ à zéro; ce que nous avons vu ne pouvoir arriver quand l'équation en S a deux racines distinctes.

Cas où l'équation en S *a une ou plusieurs racines nulles.*

Si l'équation en S a une racine nulle et seulement une, S, S' ou S'', φ est de l'une des formes $P^2 + Q^2$, $P'^2 - Q'^2$, $-P''^2 - Q''^2$. Réciproquement, si φ est de l'une de ces trois formes, l'équation en S a une racine nulle et seulement une.

Si l'équation en S a deux racines nulles, la troisième ne l'étant pas, φ est de l'une des formes P'^2, $-Q'^2$. Réciproquement, si φ est de l'une de ces deux formes, l'équation en S a deux racines nulles.

Si l'équation en S avait trois racines nulles, φ serait identiquement nul, et réciproquement.

INFLUENCE DE LA NATURE DES RACINES DE L'ÉQUATION EN S SUR LA FORME DE φ.

Cas où l'équation en S *a ses racines simples.* — 1° Si S, S' et S'' sont positifs, il résulte de ce qui précède que φ n'est pas réductible à une somme de moins de trois carrés, et, comme on a l'identité

$$\varphi = P^2 + Q^2 + S\sigma,$$

où le second membre ne renferme que des carrés positifs, le même raisonnement déjà employé prouve que φ ne peut contenir aucun carré négatif; on a donc

$$\varphi = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

2° Si S, S' et S'' sont négatifs, on conclut de même, en employant l'identité

$$\varphi = - P'^2 - Q''^2 + S''\sigma,$$

que

$$\varphi = - X^2 - Y^2 - Z^2.$$

3° Si S est négatif, S' et S'' positifs, on conclut de l'identité

$$\varphi = P^2 + Q^2 + S\sigma$$

que φ renferme au plus deux carrés positifs, et de l'identité

$$\varphi = P'^2 - Q'^2 + S'\sigma$$

qu'il renferme au plus un carré négatif; on a donc

$$\varphi = - X^2 + Y^2 + Z^2.$$

4° Si S et S' sont négatifs, S'' positif, on conclut de même, en employant les identités

$$\varphi = P'^2 - Q'^2 + S'\sigma, \quad \varphi = - P''^2 - Q''^2 + S''\sigma,$$

que

$$\varphi = - X^2 - Y^2 + Z^2.$$

5° Si l'une des racines est nulle, on a

$$\varphi = Y^2 + Z^2 \quad \text{ou} \quad \varphi = -X^2 + Z^2 \quad \text{ou} \quad \varphi = -X^2 - Y^2,$$

suivant que c'est la plus petite, la moyenne ou la plus grande.

Cas où l'équation en S *a une racine double.* — 1° Si la racine double et la racine simple sont positives, on en conclut, comme précédemment,

$$\varphi = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

2° Si la racine double et la racine simple sont négatives,

$$\varphi = -X^2 - Y^2 + Z^2.$$

3° Si la racine simple est négative et la racine double positive,

$$\varphi = -X^2 + Y^2 + Z^2.$$

4° Si la racine double est négative et la racine simple positive,

$$\varphi = -X^2 - Y^2 + Z^2.$$

5° Si la racine simple est nulle,

$$\varphi = Y^2 + Z^2 \quad \text{ou} \quad \varphi = -X^2 - Y^2,$$

suivant que la racine double est positive ou négative.

6° Si la racine double est nulle,

$$\varphi = Z^2 \quad \text{ou} \quad \varphi = -X^2,$$

suivant que la racine simple est positive ou négative.

Cas où l'équation en S *a une racine triple.* — Dans ce cas $\varphi = S\sigma$, c'est-à-dire que l'on a

$$\varphi = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Résumé. — *En désignant par* ε, ε', ε'' *des quantités égales à* + 1, — 1 *ou* 0, *suivant que* S, S', S'' *sont posi-*

tifs, négatifs ou nuls, on peut résumer ce qui précède en disant que

$$\varphi = \varepsilon X^2 + \varepsilon' Y^2 + \varepsilon'' Z^2,$$

X, Y, Z *étant trois fonctions linéaires distinctes.*

APPLICATION A LA CLASSIFICATION DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

Soit

$$f = \varphi + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

l'équation d'une surface du second ordre. Elle peut s'écrire

$$f = \varepsilon X^2 + \varepsilon' Y^2 + \varepsilon'' Z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

ou, en remplaçant X, Y, Z par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} f = \varepsilon(ax + by + cz)^2 &+ \varepsilon'(a'x + b'y + c'z)^2 \\ &+ \varepsilon''(a''x + b''y + c''z)^2 \\ &+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \end{aligned}$$

On a identiquement

$$\begin{aligned} f = {} & \varepsilon(ax + by + cz + \varepsilon\lambda)^2 \\ & + \varepsilon'(a'x + b'y + c'z + \varepsilon'\lambda')^2 \\ & + \varepsilon''(a''x + b''y + c''z + \varepsilon''\lambda'')^2 \\ & - 2(\varepsilon^2 a\lambda + \varepsilon'^2 a'\lambda' + \varepsilon''^2 a''\lambda'' - C)x \\ & - 2(\varepsilon^2 b\lambda + \varepsilon'^2 b'\lambda' + \varepsilon''^2 b''\lambda'' - C')y \\ & - 2(\varepsilon^2 c\lambda + \varepsilon'^2 c'\lambda' + \varepsilon''^2 c''\lambda'' - C'')z \\ & + D - \varepsilon\lambda^2 - \varepsilon'\lambda'^2 - \varepsilon''\lambda''^2 = 0. \end{aligned}$$

1° *L'équation en* S *n'a pas de racine nulle.* — Si l'on détermine λ, λ', λ'' par les équations

$$\begin{aligned} a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' &= C, \\ b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda'' &= C', \\ c\lambda + c'\lambda' + c''\lambda'' &= C'', \end{aligned}$$

ce qui est possible, puisque, les fonctions X, Y, Z étant distinctes, le déterminant des coefficients n'est pas nul, l'équation de la surface devient

$$\varepsilon(X+\varepsilon\lambda)^2+\varepsilon'(Y+\varepsilon'\lambda')^2+\varepsilon''(Z+\varepsilon''\lambda'')^2$$
$$=\varepsilon\lambda^2+\varepsilon'\lambda'^2+\varepsilon''\lambda''^2-D,$$

et fournit les six types suivants :

$X^2+Y^2+Z^2=1,$	ellipsoïde réel,
$X^2+Y^2+Z^2=-1,$	ellipsoïde imaginaire,
$X^2+Y^2+Z^2=0,$	ellipsoïde-point,
$X^2+Y^2-Z^2-1,$	hyperboloïde à une nappe,
$X^2+Y^2-Z^2=-1,$	hyperboloïde à deux nappes,
$X^2+Y^2-Z^2=0,$	cône.

2° *L'équation en* S *a une racine nulle.* — Par exemple, S'', d'où $\varepsilon''=0$. Si l'on détermine λ et λ' par deux des équations

$$a\lambda+a'\lambda'=C,$$
$$b\lambda+b'\lambda'=C',$$
$$c\lambda+c'\lambda'=C'',$$

ce qui est possible, puisque, les fonctions X et Y étant distinctes, l'un des trois mineurs $bc'-cb'$, $ac'-ca'$, $ab'-ba'$ n'est pas nul, par les deux premières par exemple, l'équation de la surface devient

$$\varepsilon(X+\varepsilon\lambda)^2+\varepsilon'(Y+\varepsilon'\lambda')^2$$
$$=2(\varepsilon^2c\lambda+\varepsilon'^2c'\lambda'-C'')z+\varepsilon\lambda^2+\varepsilon'\lambda'^2-D,$$

et fournit les sept types suivants

$X^2+Y^2=Z,$	paraboloïde elliptique,
$X^2+Y^2=1,$	cylindre elliptique,
$X^2+Y^2=-1,$	cylindre imaginaire,
$X^2+Y^2=0,$	plans sécants imaginaires,
$X^2-Y^2=Z,$	paraboloïde hyperbolique,
$X^2-Y^2=1,$	cylindre hyperbolique,
$X^2-Y^2=0,$	plans sécants réels.

3° *L'équation en* S *a deux racines nulles.* — Par exemple S' et S'', d'où $\varepsilon' = \varepsilon'' = 0$. Si l'on détermine λ par l'une des équations

$$a\lambda - C = 0,$$
$$b\lambda - C' = 0,$$
$$c\lambda - C'' = 0,$$

ce qui est possible, puisque, la fonction X n'étant pas identiquement nulle, l'une des trois quantités a, b, c est différente de zéro, par la première par exemple, l'équation de la surface devient

$$\varepsilon(X + \varepsilon\lambda)^2 = 2(b\lambda - C')y + 2(c\lambda - C'')z + \varepsilon\lambda^2 - D^2,$$

et fournit les quatre types suivants :

$X^2 = Y$, cylindre parabolique,
$X^2 = 1$, plans parallèles réels,
$X^2 = -1$, plans parallèles imaginaires,
$X^2 = 0$, plans confondus.

DÉTERMINATION DES SECTIONS CIRCULAIRES.

1° *L'équation en* S *a ses racines distinctes et aucune de ces racines n'est nulle.* — On a, dans ce cas,

$$\varphi = P^2 + Q^2 + S\sigma,$$
$$\varphi = P'^2 - Q'^2 + S'\sigma,$$
$$\varphi = -P''^2 - Q''^2 + S''\sigma,$$

d'où, en considérant, par exemple, la deuxième forme,

$$f = P'^2 - Q'^2 + S'\sigma + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D.$$

L'équation de la surface $f = 0$ peut donc s'écrire

$$S'\left(\sigma + 2\frac{C}{S'}x + 2\frac{C'}{S'}y + 2\frac{C''}{S'}z + \frac{D}{S'}\right)$$
$$(P' + Q')(P' - Q').$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que tout plan parallèle à l'un ou à l'autre des plans $P' + Q' = 0$, $P' - Q' = 0$ coupe la surface suivant un cercle. On verrait de même que tout plan parallèle à l'un ou à l'autre des plans $P + iQ = 0$, $P - iQ = 0$, $P'' + iQ'' = 0$, $P'' - iQ'' = 0$ coupe aussi la surface suivant un cercle. On a donc ainsi *six* séries de sections circulaires dont *deux réelles,* correspondant à la racine moyenne de l'équation en S et *quatre imaginaires* correspondant aux racines extrêmes.

Si l'on se reporte à la *classification,* on voit que le cas examiné comprend les six premiers types.

2° *L'équation en* S *a ses racines distinctes et l'une de ces racines est nulle.* — Si c'est la racine moyenne, l'équation de la surface peut s'écrire

$$2Cx + 2C'y + 2C''z + D = (P' + Q')(P' - Q').$$

Sous cette forme, on voit que tout plan parallèle à l'un ou à l'autre des plans $P' + Q' = 0$, $P' - Q' = 0$ coupe la surface suivant *une seule droite* que l'on peut considérer comme un cercle de rayon infini. Les racines S et S'' fourniraient quatre séries imaginaires de sections circulaires, comme précédemment. Si l'on se reporte à la *classification,* on voit que le cas examiné correspond au paraboloïde hyperbolique, au cylindre hyperbolique et aux plans sécants réels.

Si la racine nulle n'est pas la racine moyenne, elle fournit deux séries de plans imaginaires dont chacun coupe la surface suivant *une seule droite* imaginaire. La racine moyenne fournit deux séries de sections circulaires réelles et la troisième racine deux séries imaginaires. Ce cas est celui du paraboloïde elliptique, du cylindre elliptique, du cylindre imaginaire et des plans sécants imaginaires.

Conditions pour qu'une surface du second ordre soit de révolution.

Soit

$$A = ax + by + cz + d = 0$$

un plan perpendiculaire à l'axe de la surface de révolution et

$$\sigma + 2mx + 2ny + 2pz + q = 0$$

une sphère quelconque passant par le cercle d'intersection de ce plan avec la surface; elle recoupe la surface $f = 0$ suivant un second cercle dont le plan

$$B = ax + by + cz + d' = 0$$

est parallèle au premier. L'équation générale des surfaces du second ordre passant par les intersections de la sphère et des plans $A = 0$, $B = 0$ est

$$S(\sigma + 2mx + 2ny + 2pz + q) + AB = 0,$$

en désignant par S un paramètre arbitraire. Or, parmi ces surfaces doit se trouver $f = 0$; on a donc identiquement, pour une certaine valeur de S,

$$f = S(\sigma + 2mx + 2ny + 2pz + q) + AB.$$

Identifiant seulement les termes du second degré, il en résulte

$$\varphi - S\sigma = (ax + by + cz)^2,$$

c'est-à-dire que la fonction $\varphi - S\sigma$ est réductible à un seul carré. D'ailleurs, s'il en est ainsi, on en conclut

$$f = (ax + by + cz)^2 + (S\sigma + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D),$$

c'est-à-dire que la surface $f = 0$ est de révolution autour d'une perpendiculaire au plan

$$ax + by + cz = 0$$

menée par le centre de la sphère

$$S\sigma + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Mais nous avons vu, au début de cet article, que les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\varphi - S\sigma$ se réduisît à un seul carré étaient que l'équation en S eût une racine au moins double. Nous avons vu également que cette racine annulait tous les mineurs du second ordre de $\Delta(S)$, et réciproquement que toute valeur de S annulant les mineurs du second ordre de $\Delta(S)$ était racine double. Donc :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface du second ordre soit de révolution s'obtiennent en exprimant que les mineurs du second ordre de $\Delta(S)$ *ont une racine commune.*

1° *La racine double n'est pas nulle.* — Deux des quantités désignées dans la *classification* par ε, ε', ε'' sont alors de même signe; les six premiers types de la classification et les quatre suivants peuvent donc fournir des surfaces de révolution. Au contraire, le paraboloïde hyperbolique, le cylindre hyperbolique et les plans sécants réels n'en fournissent jamais.

2° *La racine double est nulle.* — L'équation de la surface peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} f = (ax + by + cz)^2 \\ + (0.\sigma + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D) = 0. \end{aligned}$$

On peut donc la regarder comme étant de révolution autour d'une perpendiculaire au plan

$$ax + by + cz = 0$$

menée par le centre de la sphère

$$0.\sigma + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

qui est à l'infini.

Ce cas comprend le cylindre parabolique, les plans parallèles réels, imaginaires et confondus.

Il n'y a de sections circulaires que celles fournies par l'équation en S.

Soit en effet

$$A = ax + by + cz + d = 0$$

un plan de section circulaire et

$$\sigma + 2mx + 2ny + 2pr + q = 0$$

une sphère quelconque passant par ce cercle ; elle recoupe la surface $f = 0$ suivant une seconde courbe plane ; soit

$$B = a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

l'équation du plan de cette courbe. L'équation générale des surfaces du second ordre passant par les intersections de la sphère et des plans $A = 0$, $B = 0$ est

$$S(\sigma + 2mx + 2ny + 2pr + q) + AB = 0,$$

en désignant par S un paramètre arbitraire. Or, parmi ces surfaces, doit se trouver $f = 0$: on a donc identiquement, pour une certaine valeur de S,

$$f = S(\sigma + 2mx + 2ny + 2pz + q) + AB.$$

Identifiant seulement les termes du second degré, il en résulte

$$\varphi - S\sigma = (ax + by + cz)(a'x + b'y + c'z),$$

c'est-à-dire que S est une des racines de l'équation en S, et que $A = 0$, $B = 0$ appartiennent à l'une des séries trouvées de sections circulaires.