

J. AUZELLE

Concours d'admission à l'École centrale (deuxième session, 1879)

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1
(1882), p. 176-180

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__176_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(DEUXIÈME SESSION, 1879).

SOLUTION DE M. J. AUZELLE.

Élève du Lycée de Moulins.

On donne un carré $PQP'Q'$, dont la demi-diagonale $OP = OQ = n$.

1° On demande d'écrire l'équation générale des coniques tangentes aux quatre côtés de ce carré, en distinguant les cas où ce sont des ellipses, des hyperboles ayant leurs sommets sur OPx , des hyperboles ayant leurs sommets sur OPy , ou enfin des paraboles.

2° On considère l'une quelconque des ellipses inscrites dans le carré; sur son demi-axe OA , comme hypoténuse, on construit un triangle rectangle OAs , dont le côté As a une longueur fixe donnée $As = K$; sur la direction de l'axe OA , on prend une longueur $OS = Os$ et on construit une hyperbole équilatère ayant son centre en O et l'un de ses sommets en S ; cette hyper-

bole coupe l'ellipse considérée au point M. On demande d'écrire l'équation lieu des points M.

3° On discutera la nature et la position du lieu, suivant la grandeur de la ligne donnée K et suivant que OA est le demi-grand axe ou le demi-petit axe de l'ellipse considérée.

1° Les diagonales d'un parallélogramme circonscrit à une conique sont des diamètres conjugués; il en résulte que les droites PP' et QQ' sont des axes. Soit alors l'équation cherchée

$$A.x^2 + C.y^2 + F = 0.$$

En exprimant que P'Q est tangente à ces coniques et prenant $A = 1$, on obtient la relation

$$n^2 - (C + 1)(n^2 + F) = 0;$$

par suite l'équation demandée est

$$(1) \quad x^2 + C.y^2 = \frac{C.n^2}{C+1}.$$

On peut avoir des ellipses, des hyperboles ou même des courbes du genre parabole. Si les hyperboles ont leurs sommets sur OPx, leur intersection avec OQy doit donner deux valeurs imaginaires de y, ou deux valeurs imaginaires de x, si ces sommets sont sur OQy. En exprimant qu'il en est ainsi, on trouve les résultats suivants :

$C > 0$ ellipses,

$C < 0$ hyperboles $\left\{ \begin{array}{ll} C < -1 & \text{sommets sur OPx,} \\ C > -1 & \text{» OQy,} \end{array} \right.$

$C = 0$ droites doubles.

2° et 3° L'équation (1) s'écrit

$$\frac{x^2}{C.n^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1.$$

$$\frac{x^2}{C+1} + \frac{y^2}{C+1} = 1.$$

Si nous considérons d'abord le triangle rectangle construit sur OA comme hypoténuse, l'hyperbole équilatère dont la longueur de l'axe est $\frac{Cn^2}{C+1} - K^2$ a évidemment pour équation $x^2 - y^2 = \frac{Cn^2}{C+1} - K^2$. L'élimination de C entre cette équation et l'équation de l'ellipse donnera le lieu.

On obtient facilement $C = \frac{K^2 - y^2}{y^2}$ et la substitution donne

$$K^2(x^2 - y^2 + K^2) = n^2(K^2 - y^2).$$

La nature du lieu dépend du signe de $K^2(K^2 - n^2)$.

Ce produit est toujours négatif, car, si l'on supposait $K > n$, le triangle rectangle OAs serait impossible.

Le lieu est donc toujours une ellipse.

Considérons maintenant le triangle rectangle construit sur le petit axe de l'ellipse comme hypoténuse.

L'hyperbole équilatère devient

$$x^2 - y^2 = \frac{n^2}{C+1} - K^2.$$

En éliminant toujours C, on a $C+1$ et par suite C tiré de cette équation; en substituant dans l'équation de l'ellipse, il vient

$$(x^2 - y^2 + K^2)[2(n^2 - y^2) + K^2 - n^2] + n^2 y^2 = 0,$$

qui est l'équation du lieu.

Posons, pour le construire, $x^2 - y^2 + K^2 = t$:

$$y^2 = \frac{t(K^2 + n^2 - 2t)}{n^2}, \quad x^2 = \frac{t(K^2 + 2n^2 - 2t) - K^2 n^2}{n^2}.$$

Le dénominateur étant une constante, il n'y a qu'à chercher entre quelles limites doit varier t pour que les numérateurs soient en même temps positifs.

Le coefficient du terme en t^2 étant négatif dans les deux numérateurs, t doit être compris entre les racines, qui sont par ordre de grandeur 0, $\frac{K^2}{2}$, $\frac{K^2 + n^2}{2}$, n^2 ; t doit donc être compris entre $\frac{K^2}{2}$ et $\frac{K^2 + n^2}{2}$.

La courbe étant symétrique par rapport aux deux axes, il suffit de la construire dans le premier quadrant. Pour avoir le sens des variations éprouvées par x et y , il suffit de considérer la dérivée du numérateur de y^2 et celle du numérateur de x^2 ; alors la discussion, qui n'offre plus de difficulté, peut être résumée dans le tableau ci-dessous.

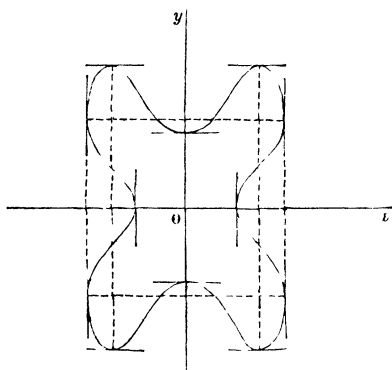
$t.$	$x'.$	$x.$	$y'.$	$y.$
$\frac{K^2}{2}$		0		$\frac{K\sqrt{2}}{2}$
croît	+	croît	+	croît
$\frac{K^2 + n^2}{4}$		$\sqrt{\quad}$	0	max. $\frac{K^2 + n^2}{2n\sqrt{2}}$
croît	+	croît	--	décroît
$\frac{K^2 + 2n^2}{4}$	0	max. $\frac{2n^2 - K^2}{2n\sqrt{2}}$	--	décroît
croît	--	décroît	--	décroît
$\frac{K^2 + n^2}{2}$		$\sqrt{\frac{n^2 - K^2}{2}}$		0

On peut remarquer que t ne pouvant être infini, et par suite, ni x ni y , il n'y a pas de branches infinies.

La courbe étant symétrique par rapport aux deux axes, les tangentes aux points pour lesquels on a $x = 0$ ou $y = 0$ sont perpendiculaires soit à Oy soit à Ox ; comme les maximums correspondent aussi à des tangentes parallèles aux axes, on voit que l'on a en tout douze tangentes.

(180)

En tenant compte des grandeurs relatives des valeurs



de x et de y qui correspondent aux points du lieu, on a une courbe dont la forme est celle indiquée ci-dessus.