

H. LEZ

Concours d'admission à l'École centrale en 1880 (première session)

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1
(1882), p. 122-126

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__122_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1880

(PREMIÈRE SESSION);

PAR M. H. LEZ. .

Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires, et sur Ox un point A , sur Oy un point B . On mène par le point A une droite quelconque AR de coefficient angulaire m .

1° Former l'équation de l'hyperbole H, qui est tangente à l'axe Ox au point O, qui passe par le point B et pour laquelle la droite AR est une asymptote.

2° On fait varier m et on demande le lieu décrit par le point de rencontre de la tangente en B à l'hyperbole H et de l'asymptote AR.

3° On considère le cercle circonscrit au triangle AOB; ce cercle coupe l'hyperbole H aux points O et B et en deux autres points P et Q. Former l'équation de cette droite PQ; puis, faisant varier m , trouver successivement les lieux des points de rencontre de cette droite PQ avec les parallèles menées par le point O, soit à l'asymptote AR, soit à la seconde asymptote de l'hyperbole H.

Si la droite

$$(1) \quad \text{AR} \quad \text{ou} \quad y - mx + ma = 0$$

est une asymptote, l'autre asymptote est de la forme

$$y + \gamma x + \delta = 0,$$

et l'on pourra représenter l'hyperbole H par

$$(2) \quad (y - mx + ma)(y + \gamma x + \delta) - k^2 = 0.$$

Pour que cette courbe passe par l'origine O et soit tangente à l'axe Ox, il faut que le terme constant et le terme en x disparaissent, ce qui donne

$$ma\delta = k^2, \quad \delta = a\gamma.$$

Alors l'équation (2) devient

$$(3) \quad y^2 - \gamma m x^2 + (\gamma - m)xy + a(m + \gamma)y = 0.$$

1° Cette hyperbole passera aussi par le point

$$B(x = 0, y = b),$$

si l'on a

$$a\gamma = -(b + am),$$

ce qui ramène l'équation (3) à

$$(4) \quad ay^2 + m(b + am)x^2 - (b + 2am)xy - aby = 0 = H.$$

2° Le coefficient angulaire des tangentes à cette hyperbole étant

$$\mu = \frac{2m(b + am)x - y(b + 2am)}{ab + (b + 2am)x - 2ay},$$

au point B il sera

$$\mu = \frac{b + 2am}{a}.$$

La tangente au même point aura pour équation

$$(5) \quad a(y - b) = (b + 2am)x.$$

Éliminant m entre les équations (1) et (5), on obtiendra pour le lieu demandé l'équation

$$bx^2 + axy + a^2y - a^2b = 0,$$

décomposable en deux facteurs linéaires,

$$(x + a)(ay + bx - ab) = 0,$$

dont le second est la droite AB (1).

3° Soit $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ l'équation de PQ, celle de OB étant $x = 0$; la courbe

$$H - \lambda x(qx + py - pq) = 0$$

deviendra le cercle

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

(1) M. Moret-Blanc en conclut ce théorème :

Si, par un point O d'une hyperbole, on mène une tangente OA et une normale OB qui rencontre l'hyperbole en un point B, la tangente en B à l'hyperbole et la perpendiculaire à la tangente OA, au point où elle rencontre une des asymptotes, se rencontrent sur l'autre asymptote.

circonscrit au triangle AOB, si

$$\lambda = -\frac{a^2}{pq}, \quad p = \frac{a^2}{a - m(b + am)}, \quad q = \frac{a^2}{b + 2am}.$$

On a ainsi pour la droite PQ

$$(6) \quad (b + 2am)y + [a - m(b + am)]x = a^2.$$

L'équation de l'hyperbole H pouvant s'écrire sous la forme

$$[y - m(x - a)] \\ \times [ay - (b + am)(x + a)] + a^2m(b + am) = 0,$$

on voit que les droites menées par l'origine O parallèlement aux deux asymptotes seront

$$y = mx \quad \text{et} \quad y = \frac{b + am}{a}x.$$

Éliminant successivement m entre ces équations et celle de la droite (6), on trouve que les lieux demandés se confondent et ne sont autre chose que le cercle

$$x^2 + y^2 - ax = 0,$$

décrit sur OA comme diamètre (1).

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc, qui a également résolu la question proposée à la deuxième session et dont une solution a paru (2^e série, t. XX, p. 464), par M. Chambeau, élève de Notre-Dame du Sacré-Cœur, à Plaisance, et par M. J. Boudènes, à Avignon.

(1) M. Moret-Blanc en conclut ce théorème :

Si, par un point O d'une hyperbole, on mène une tangente OA qui rencontre une asymptote en A et une normale OB qui rencontre l'hyperbole en B, la circonférence circonscrite au triangle AOB coupe l'hyperbole en deux autres points P et Q tels que la droite PQ rencontre les parallèles menées par le point aux asymptotes en deux points appartenant à la circonférence décrite sur OA comme diamètre.

MM. Moret-Blanc et Pisani ont résolu les questions 1352 et 1355, dont une solution a été **publiée** (2^e série, t. XX, p. 340, 342 et 344). M. Pisani a aussi résolu les **questions** 1373 et 1374. M. l'abbé Geneix-Martin a résolu la question **1376**, au sujet de laquelle M. Catalan a fait une rectification (2^e série, t. XX, p. 528). Cette question a aussi été résolue par MM. J.-J.-A. Mathieu, **lieutenant-colonel** d'artillerie; H. Lez; N. Goffart; F. Pisani; François **Borletti**, ingénieur à Milan; Juan Gavino, au Ministère de la Marine, à **Madrid**; Adrien Palaz et Henri Vuilleumier, élèves à l'École polytechnique **de Zurich**; A. Hottenhoff, E. Stache, J. de Munck, élèves de l'Athénée de Bruxelles; V. Fleury, L. Meyer, H. Vielle, A. Leblond, élèves du lycée du Havre; J. Boudènes, du lycée d'Avignon.