

J.-B. POMEY

Solution de la question proposée pour l'admission à l'École polytechnique en 1881

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1
(1882), p. 111-113

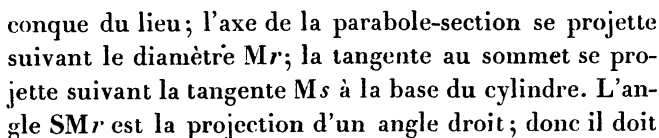
http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__111_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



être obtus; donc M est sur l'arc OP'. Le point du lieu se trouve à l'intersection de la normale en M au plan, avec la sphère décrite sur rs comme diamètre. Cette sphère passe par le point t sur Mr . La hauteur du point du lieu étant z au-dessus de la base, son carré z^2 a pour valeur $Mt.Mr$, comme on le voit dans le petit cercle découpé dans la sphère susdite par le plan vertical tMr .

Cela posé, la tangente en $M(x', y')$ a pour équation

$$y = mx + \frac{p}{2m},$$

en posant

$$m = \frac{p}{y'},$$

car m et y' sont négatifs. La normale PB a pour équation

$$x + y = \frac{3p}{2}.$$

Cherchons l'abscisse du point d'intersection. On a

$$x(1 + m) = \frac{3p}{2} - \frac{p}{2m} = \frac{p}{2m}(3m - 1),$$

ou

$$x = \frac{p}{2m} \frac{3m - 1}{1 + m}$$

et

$$Mt = x' + (-x),$$

car x est négatif. Donc

$$Mt = x' - \frac{p}{2} \frac{3p - y'}{y' + p} = x' - \frac{y'}{2} \frac{3p - y'}{y' + p}.$$

On a

$$Mr = \frac{p}{2} - x' + p - y' = \frac{3p}{2} - x' - y'.$$

Donc, les équations du lieu sont, en supprimant les ac-

cents,

$$y^2 = 2px,$$

$$(y+p)z^2 = \left[x(y+p) - \frac{y}{2}(3p-y) \right] \left(\frac{3p}{2} - x - y \right).$$

La projection de la courbe sur le plan yOz a pour équation

$$z^2 = \frac{1}{y+p} y \left[\frac{y}{2p}(y+p) - \frac{3p-y}{2} \right] \left(\frac{3p}{2} - \frac{y^2}{2p} - y \right),$$

$$z^2 = \frac{y(y-p)}{4p^2(y+p)} (y+3p)(3p^2 - 2py - y^2),$$

$$z^2 = -y \frac{(y-p)^2 (y+3p)^2}{4p^2(y+p)};$$

c'est une courbe du cinquième ordre à deux points isolés.

Pour que z soit réel, on voit bien qu'il faut que y et $y+p$ soient de signe contraire, c'est-à-dire que y soit négatif et inférieur à p . On voit que z devient infini pour $y = -p$, c'est-à-dire que la courbe gauche est asymptote à la génératrice P' ; elle passe par le sommet (origine). Elle a le point P comme point isolé, ce qui est évident, et le point $y = -3p$, $x = \frac{9p^2}{2p} = \frac{9}{2}p$, où la normale PB rencontre la parabole : c'est lorsque le plan de section devient vertical qu'on obtient ces points. On s'assure que la génératrice O au sommet est une tangente.

Note. — Autres solutions par MM. l'abbé Geneix-Martin et Moret-Blanc.