

X. ANTOMARI

Sur deux propriétés relatives aux foyers et aux cercles focaux dans les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1
(1882), p. 102-109

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__102_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR DEUX PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX FOYERS ET AUX CERCLES FOCaux DANS LES CONIQUES;

PAR M. X. AN TOMARI,

Professeur au lycée de Carcassonne.

Première propriété. — On sait que l'on peut définir un foyer d'une courbe du second degré le centre d'un cercle de rayon nul doublement tangent à la courbe ; de sorte que, si l'on désigne par α et β les coordonnées d'un foyer, et par $mx + ny + h = 0$ l'équation de la directrice correspondante, l'équation de la courbe sera

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (mx + ny + h)^2.$$

Le premier membre de cette équation peut être considéré comme le carré de la distance normale du point (x, y) au cercle de rayon nul (α, β) , et l'on peut considérer une conique comme le lieu des points dont le rapport des distances à un cercle de rayon nul et à une droite fixe est constant.

Cette définition peut être généralisée, et l'on peut dire qu'une conique est le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un cercle fixe et à une droite fixe est constant, les distances étant comptées normalement.

Cherchons, en effet, ce lieu géométrique.

Pour cela, rapportons la courbe à deux diamètres rectangulaires du cercle, l'un de ces diamètres étant perpendiculaire à la droite fixe. Si $x - \alpha = 0$ est l'équation de la droite fixe, K la valeur du rapport constant et R le rayon du cercle, l'équation du lieu sera, en prenant pour distance au cercle la distance minimum,

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - R}{x - \alpha} = K,$$

ou, en la rendant rationnelle,

$$(2) \quad x^2 + y^2 = [K(x - \alpha) + R]^2,$$

équation d'une courbe du second degré ayant pour foyer l'origine, et pour directrice une parallèle à la droite fixe.

Si l'on retranche R^2 des deux membres de l'équation (2), elle devient

$$(3) \quad x^2 + y^2 - R^2 = K(x - \alpha)[K(x - \alpha) + 2R].$$

Sous cette forme, l'équation montre que la courbe passe par les points communs au cercle

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

et aux deux droites

$$x - \alpha = 0, \quad K(x - \alpha) + 2R = 0.$$

Il est clair, d'après cela, que la droite représentée par l'équation

$$K(x - \alpha) + 2R = 0$$

doit jouer un rôle analogue à celui de la droite

$$K(x - \alpha) = 0.$$

Et, en effet, si l'on prend pour distance au cercle la distance maximum, et pour droite fixe la droite

$$K(x - \alpha) + 2R = 0,$$

le rapport restant le même, l'équation du lieu est

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + R}{\frac{1}{K} [K(x - \alpha) + 2R]} = K,$$

ou bien

$$\sqrt{x^2 + y^2} = K(x - \alpha) + R,$$

ou enfin

$$x^2 + y^2 = [K(x - \alpha) + R]^2,$$

équation identique à l'équation (2). Il est d'ailleurs évident que cette équation peut représenter l'une quelconque des courbes du second degré.

Ainsi :

THÉORÈME. — Une conique peut être considérée comme le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un cercle fixe et à une droite fixe est constant, les distances étant comptées sous un angle droit. Le centre du cercle est un foyer de la conique, et la droite fixe perpendiculaire à l'axe focal passe par les points communs à la courbe et au cercle.

Remarque. — Il y a deux cordes communes à la conique et au cercle, perpendiculaires à l'axe focal. Chacune d'elles donnera un mode de génération de la conique. Seulement, si l'on prend la corde la plus rapprochée du foyer, il faudra prendre, pour distances au cercle, les distances minima ; pour l'autre, les distances maxima.

D'après cela, on pourrait définir un foyer : le centre d'un cercle de rayon absolument quelconque, mais tel que le rapport des distances normales d'un point quelconque de la courbe à ce cercle et à une droite fixe convenablement choisie soit constant.

Nous venons de voir qu'à un cercle donné correspondent deux droites

$$Kx - Kz = 0,$$

$$Kx + 2R - Kz = 0.$$

L'équation de la directrice étant

$$Kx + R - Kz = 0,$$

on voit qu'elle est également éloignée des deux droites précédentes.

Il résulte de là qu'il existe dans le plan d'une conique une infinité de systèmes formés d'un cercle et de deux droites, et tels que le rapport des distances normales maxima ou minima d'un point quelconque de la courbe à ce cercle et à l'une ou l'autre de ces droites soit constant. Tous ces cercles ont pour centre commun un foyer ; les droites correspondantes sont les sécantes communes perpendiculaires à l'axe focal.

Deuxième propriété. — Cette deuxième propriété est relative aux cercles focaux. On sait que l'on appelle ainsi les cercles doublement tangents à une courbe du second degré.

Rapportons la courbe à deux diamètres rectangulaires d'un cercle focal, l'un de ces diamètres étant perpendiculaire à la corde de contact. Soit

$$x - \alpha = 0$$

l'équation de cette corde. L'équation de la courbe pourra être mise sous la forme

$$(4) \quad x^2 + y^2 - R^2 = K^2(x - \alpha)^2,$$

R désignant le rayon du cercle focal. Par un point quelconque de la courbe, menons la tangente MP au cercle focal, et la perpendiculaire MQ à la corde de contact.

L'équation (4) exprime que le rapport $\frac{MP}{MQ}$ est constant.

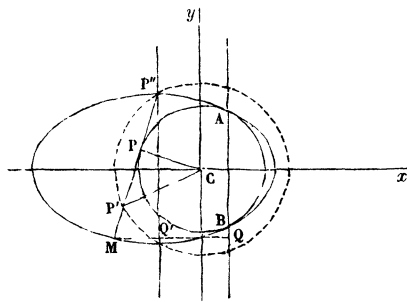
Imaginons un cercle de rayon R' concentrique au cercle focal considéré. Son équation sera

$$(5) \quad x^2 + y^2 - R'^2 = 0.$$

Si l'on retranche membre à membre les équations (4) et (5), on obtient

$$K^2(x - \alpha)^2 = R'^2 - R^2, \quad R' > R,$$

équation qui représente un système de deux droites, les



sécantes communes à la conique (4) et au cercle (5) perpendiculaires à l'axe des x .

Considérons l'une de ces sécantes, celle qui a pour équation

$$K(x - \alpha) - \sqrt{R'^2 - R^2} = 0.$$

La distance du point M à cette sécante est

$$MQ' = \frac{K(x - \alpha) - \sqrt{R'^2 - R^2}}{K}.$$

D'autre part, si l'on désigne par P' l'un des points de rencontre de MP avec le cercle de rayon R', on a

$$MP' = MP - PP'.$$

Or

$$PP' = \sqrt{R'^2 - R^2};$$

donc

$$MP' = MP - \sqrt{R'^2 - R^2}.$$

D'ailleurs

$$MP = K(x - \alpha),$$

et, par suite,

$$MP' = K(x - \alpha) - \sqrt{R'^2 - R^2}.$$

On en déduit

$$\frac{MP'}{MQ'} = \frac{K(x - \alpha) - \sqrt{R'^2 - R^2}}{\frac{1}{K} [K(x - \alpha) - \sqrt{R'^2 - R^2}]} = K.$$

Remarquons, d'ailleurs, que l'angle PP'C est constant, puisque la circonférence R' est concentrique à la circonférence R; il en est de même de l'angle supplémentaire MP'C.

Ainsi :

THÉORÈME. — *Toute courbe du second degré peut être considérée comme le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un cercle fixe et à une droite fixe est constant, les distances au cercle fixe étant comptées sous un angle constant.*

Remarque. — On serait évidemment arrivé au même résultat si l'on avait pris la deuxième sécante commune perpendiculaire à l'axe focal, avec la distance MP'' .
Donc :

Étant donné un cercle focal d'une conique, il existe dans le plan de cette courbe une infinité de systèmes composés d'un cercle et de deux droites, et tels que le rapport des distances maxima ou minima sous un *angle constant*, d'un point quelconque de la courbe à ce cercle et à l'une ou l'autre de ces droites, soit constant. Tous ces cercles sont concentriques avec le cercle focal considéré, et les droites correspondantes sont les sécantes communes à ces cercles et à la conique, perpendiculaires à l'axe focal.

Cette propriété est analogue à celle que nous avons donnée plus haut relativement aux cercles ayant pour centre un foyer ; elle complète l'analogie des foyers et des cercles focaux.

On voit, en outre, en rapprochant les deux propriétés, que l'on peut donner, pour les coniques, le mode général de génération suivant :

Une conique peut être considérée, d'une infinité de manières, comme le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un cercle fixe et à une droite fixe est constant, les distances au cercle fixe étant comptées sous un angle constant.

Si l'angle constant est droit, tous ces cercles ont pour centre commun un foyer.

Si l'angle est nul ou égal à 180° , les cercles sont des cercles focaux doublement tangents.

Pour toute autre valeur de l'angle, les cercles sont concentriques avec un cercle focal.

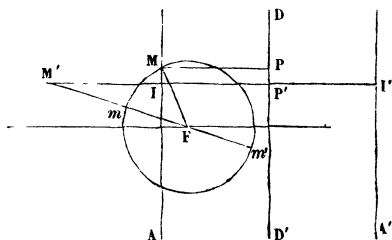
Remarque. — La première propriété peut être établie

géométriquement d'une manière simple. Soient, en effet, F et DD' le foyer et la directrice d'une courbe du second degré ; soient, en outre, M et M' deux points de cette courbe. On a, en désignant par K l'excentricité,

$$\frac{MF}{MP} = \frac{M'F}{M'P'} = K.$$

On en déduit

$$\frac{M'F - MF}{M'P' - MP} = \frac{M'F + MF}{M'P' + MP} = K.$$



Du point F comme centre, avec MF comme rayon, décrivons une circonférence, et menons IA et I'A' parallèles à la directrice, et telles que IP' = I'P' = MP. On voit immédiatement, sur la figure, que l'on a

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'\mathbf{F} - \mathbf{M}\mathbf{F} &= \mathbf{M}'m, & \mathbf{M}'\mathbf{P}' - \mathbf{M}\mathbf{P} &= \mathbf{M}'\mathbf{I}, \\ \mathbf{M}'\mathbf{F} + \mathbf{M}\mathbf{F} &= \mathbf{M}'m', & \mathbf{M}'\mathbf{P}' + \mathbf{M}\mathbf{P} &= \mathbf{M}'\mathbf{I}'. \end{aligned}$$

On a, par suite,

$$\frac{M'm}{M'I} = \frac{M'm'}{M'I'} = K,$$

relations qui expriment la première propriété dont il est question dans ce travail.