

WEILL

Théorèmes sur les normales à l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 73-94

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__73_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES SUR LES NORMALES A L'ELLIPSE;

PAR M. WEILL.

L'ellipse étant rapportée à ses axes, considérons une normale abaissée d'un point (α, β) et dont le pied ait pour coordonnées x_1, y_1 . Nous aurons la relation bien connue

$$(1) \quad (a^2 - b^2)x_1y_1 + b^2\beta x_1 - a^2\alpha y_1 = 0.$$

Remplaçons, dans cette relation, x_1 par $\frac{ay'}{b}$ et y_1 par $-\frac{bx'}{a}$; elle devient

$$(a^2 - b^2)x'y' - a^2y'\frac{b}{a}\beta - b^2x'\frac{a}{b}\alpha = 0.$$

On en conclut le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si l'on abaisse d'un point les normales à une ellipse, et si l'on mène les quatre diamètres de l'ellipse qui sont perpendiculaires à ces normales, les normales à l'ellipse menées aux extrémités des quatre demi-diamètres obtenus en tournant dans le même sens sont concourantes.*

Reprenons la relation (1) et remplaçons x_1 et y_1 par $\frac{a^2}{x}$ et $\frac{b^2}{y}$; nous obtenons la relation

$$(2) \quad a^2 - b^2 + \beta y - \alpha x = 0.$$

Le point (x, y) , dont les coordonnées sont $\frac{a^2}{x_1}$ et $\frac{b^2}{y_1}$, a une position remarquable : c'est le quatrième sommet du rectangle formé sur les axes de l'ellipse et ayant pour diagonale la tangente au point (x_1, y_1) . Les quatre points obtenus en considérant les quatre normales issues du point (α, β) sont donc sur la droite représentée par l'équation (2). Les milieux des diagonales des quatre rectangles, c'est-à-dire les milieux des portions de tangentes limitées aux axes, sont donc sur une droite ayant pour équation

$$(3) \quad a^2 - b^2 + 2\beta y - 2\alpha x = 0.$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Si d'un point on mène les normales à une série d'ellipses ou d'hyperboles homofocales, et les tangentes aux pieds de ces normales, les milieux des portions des tangentes limitées aux axes sont sur une droite fixe; cette droite est la polaire du point considéré par rapport à l'hyperbole équilatère homofocale aux coniques considérées.*

Considérons la tangente variable limitée aux axes, son milieu décrit une droite fixe; donc elle enveloppe une parabole tangente aux deux axes et à la droite fixe; le lieu des pieds des normales est donc le lieu des projections d'un point de la directrice d'une parabole sur ses tangentes. En continuant à développer les conséquences de notre théorème, on retrouve les théorèmes si connus et qui sont relatifs aux normales aux coniques homofocales.

Proposons-nous de mener d'un point (α, β) une normale à l'ellipse; construisons la droite Δ relative à ce point et déterminée par l'équation (3); cherchons les points où cette droite rencontre la courbe du quatrième degré qui est le lieu des milieux des portions des tangentes à l'ellipse

comprises entre les deux axes ; à chacun des points de rencontre M de la droite Δ avec cette courbe correspondra une normale dont on obtiendra le pied en menant par le point M une droite terminée aux axes et partagée en ce point en deux parties égales ; le point où cette droite touche l'ellipse sera le pied de la normale. Le problème des normales à l'ellipse menées d'un point (α, β) est donc ramené à l'intersection d'une droite ayant pour équation

$$\alpha^2 - b^2 + 2\beta y - 2\alpha x = 0$$

et d'une courbe du quatrième degré ayant pour équation

$$\frac{\alpha^2}{4x^2} + \frac{b^2}{4y^2} = 1.$$

Quand la droite Δ est tangente à la courbe du quatrième degré en un point K, le point (α, β) correspondant à la droite Δ n'est autre que le *centre de courbure* de l'ellipse au point qui correspond à K ; on a donc ainsi une construction du centre de courbure de l'ellipse, d'ailleurs peu intéressante ; quand le point (α, β) est donné et que les coniques varient en restant homofocales, la droite Δ reste fixe, et la courbe du quatrième degré varie ; les quatre points de rencontre des courbes variables avec la droite Δ déterminent sur cette droite une involution de quatre points, et le centre de gravité des quatre points demeure fixe sur la droite.

Considérons les équations de la normale à l'ellipsoïde rapporté à ses axes. Soient α, β, γ les coordonnées d'un point de l'espace, et x_1, y_1, z_1 celles du pied d'une normale menée du point (α, β, γ) . Nous aurons les relations

$$\frac{\alpha - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{\beta - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{\gamma - z_1}{\frac{z_1}{c^2}}.$$

Remplaçons x_1, y_1, z_1 par $\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z}$, nous obtenons les relations

$$(1) \quad \alpha x - a^2 = \beta y - b^2 = \gamma z - c^2.$$

Or, le point dont les coordonnées sont x, y, z est le sommet du parallélépipède construit sur les axes et dont trois sommets sont les points où le plan tangent au point (x_1, y_1, z_1) rencontre les axes.

Appelons G_1 le centre de gravité du triangle formé par ces trois points; il aura pour coordonnées $\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}$; donc il sera sur la droite ayant pour équations

$$(2) \quad 3\alpha x - a^2 = 3\beta y - b^2 = 3\gamma z - c^2.$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Si d'un point on abaisse des normales sur une série de surfaces du second degré homofocales, et que l'on mène les plans tangents aux pieds de ces normales, les centres de gravité des triangles déterminés sur ces plans par les trois axes sont sur une droite fixe.*

Le théorème que nous venons d'établir permet d'étudier les propriétés du système des normales menées d'un point à une série de surfaces homofocales; il ramène la recherche des normales à un ellipsoïde à l'intersection d'une droite et d'une surface du sixième degré ayant pour équations

$$3\alpha x - a^2 = 3\beta y - b^2 = 3\gamma z - c^2,$$

$$\frac{\alpha^2}{9x^2} + \frac{\beta^2}{9y^2} + \frac{\gamma^2}{9z^2} = 1.$$

Supposons que le point donné (α, β, γ) reste fixe et que les surfaces varient en restant homofocales, la droite Δ

que nous considérons restera fixe ; mais, si le point se déplace d'une manière quelconque dans l'espace, elle engendrera un *complexe* ; si le point se meut sur une surface, la droite engendrera une *congruence* ; enfin, si le point se meut sur une courbe, la droite engendrera une surface, et cette surface sera développable ; en particulier, si le point décrit une droite, la droite Δ engendre un cône du second ordre. Il y a là les éléments d'une étude intéressante, mais qui nous détournerait de notre but actuel.

Reprenons la relation qui existe entre les coordonnées α, β d'un point P et les coordonnées x_1, y_1 du pied d'une des normales issues de ce point ; cette relation peut s'écrire

$$\frac{\alpha - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{\beta - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = k.$$

Lorsque le point A qui a pour coordonnées x_1, y_1 se déplace sur l'ellipse, si la quantité k reste constante, les coordonnées du point P satisferont aux deux équations

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha = x_1 \frac{a^2 + k}{a^2}, \\ \beta = y_1 \frac{b^2 + k}{b^2}. \end{cases}$$

Le point P décrira donc une ellipse ayant pour équation

$$\frac{a^2 \alpha^2}{(a^2 + k)^2} + \frac{b^2 \beta^2}{(b^2 + k)^2} = 1.$$

Par un point P donné, passent quatre de ces ellipses qui sont chacune tangentes en quatre points à la développée de l'ellipse donnée ; la connaissance d'une des valeurs de k correspondant à un point P équivaut à la connaissance d'une de ces ellipses ou d'une des nor-

males issues du point P ; inversement, si le point P est pris sur une de ces ellipses, l'une des normales issues du point P est distincte des trois autres, car les coordonnées du pied de cette normale sont données par les équations (1), dans lesquelles les quantités α , β et k sont connues. Tous les développements qui vont suivre sont des conséquences de cette remarque.

Considérons un point P qui se déplace sur une des ellipses dont il s'agit, et appelons *normale singulière* la normale PA, dont le pied A s'obtient indépendamment des trois autres normales issues du point P. Soient B, C, D les pieds des trois autres normales issues du point P; quand le point P se déplace sur l'ellipse (E), le triangle BCD se déplace en même temps; la normale au point B à l'ellipse donnée rencontre l'ellipse (E) en deux points P et Q; elle est normale singulière relativement au point Q et normale non singulière relativement au point P : donc à une position du point B ne correspond qu'un seul triangle BCD; donc ce triangle, dans son déplacement, enveloppe une conique (L) ayant les mêmes axes en position que l'ellipse donnée. Or les ellipses (E) recouvrent tout le plan; il en est de même des ellipses (L) : donc tout triangle qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position jouira des propriétés du triangle BCD, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Quand un triangle BCD se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses (S) et (L) ayant les mêmes axes en position, les normales à l'ellipse (S) aux trois points B, C, D concourent en un même point P; le lieu de ce point P est une ellipse tangente en quatre points à la développée de (S).*

THÉORÈME V. — *Si l'on mène d'un point les quatre normales à une ellipse, on peut tracer une conique*

ayant les mêmes axes en position et tangente aux trois côtés de l'un des triangles formés avec trois des quatre pieds des normales comme sommets; chacun de ces triangles donne d'ailleurs, en général, naissance à une conique distincte.

Ce théorème n'est qu'un énoncé différent du théorème précédent.

Reprenons les ellipses particulières que nous avons considérées. Si l'on donne à k diverses valeurs, on aura une série d'ellipses partageant dans un même rapport les segments des normales comptés depuis le pied de ces normales; parmi ces courbes se trouvent des droites et des cercles: les droites sont les axes de symétrie de l'ellipse donnée, et les cercles sont les cercles concentriques à l'ellipse donnée et ayant pour rayons $a - b$ et $a + b$. On retrouve ainsi des résultats bien connus.

Considérons maintenant les quatre normales issues d'un point $P(\alpha, \beta)$, parmi lesquelles se trouve une *normale singulière* correspondant à la valeur k .

L'hyperbole équilatère qui passe par les pieds des normales a pour équation

$$(1) \quad a^2 \alpha y - b^2 \beta x - (a^2 - b^2) xy = 0.$$

L'équation qui donne les ordonnées des pieds des normales est

$$(2) \quad (a^2 - b^2)^2 y^4 + 2b^2(a^2 - b^2)\beta y^3 + \dots - b^6 \beta^2 = 0.$$

Considérons un cercle ayant pour équation

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0.$$

Les ordonnées des points de rencontre du cercle et de l'ellipse sont données par l'équation

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a^2 - b^2)^2 y^4 + 4Bb^2(a^2 - b^2)y^3 + \dots \\ + b^4[(a^2 + C)^2 - 4a^2A^2] = 0. \end{array} \right.$$

Soit $A(x_1, y_1)$ le pied de la *normale singulière* issue du point P, et soient y_2, y_3, y_4 les pieds des trois autres normales issues du point P, points que nous désignerons par B, C, D; si le cercle représenté par l'équation (3) passe par les points B, C, D, les équations (2) et (4) auront pour solutions y_1, y_2, y_3, y_4 , et $-y_1, y_2, y_3, y_4$. On aura donc

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{-2b^2\beta}{a^2 - b^2},$$

$$-y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{-4Bb^2}{a^2 - b^2}.$$

On en déduit

$$y_1 = \frac{b^2}{a^2 - b^2} (2B - \beta),$$

et, comme on a

$$y_1 = \frac{b^2\beta}{b^2 + k},$$

il vient

$$(5) \quad 2B = \frac{a^2 + k}{b^2 + \beta} \beta, \quad 2A = \frac{b^2 + k}{a^2 + k} \alpha.$$

Donc, si l'on suppose que le point P se déplace sur l'ellipse correspondant à la valeur k , le centre T du cercle circonscrit au triangle BCD décrit une ellipse dont on a facilement l'équation à l'aide des formules (5). On trouve de même que le centre de gravité de ce triangle a pour coordonnées

$$y = -\frac{a^2 + b^2 + 2k}{3(a^2 - b^2)} y_1,$$

$$x = \frac{a^2 + b^2 + 2k}{3(a^2 - b^2)} x_1.$$

Ce point G décrit donc une ellipse dont on a facilement l'équation; il en est de même pour le point de concours H des hauteurs et le centre I du cercle des neuf points du triangle. Considérons la figure formée avec les points P, A, T, G, H, I; toutes les droites de cette

figure restent, pendant leur déplacement, normales à autant d'ellipses fixes : en effet, l'une quelconque de ces droites réunit deux points dont les coordonnées sont de la forme $(\lambda x_1, \lambda' y_1)$, $(\mu x_1, \mu' y_1)$, et il est évident que, si le point dont les coordonnées sont x_1, y_1 décrit une ellipse ayant pour équation

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

les deux points que nous considérons décriront des ellipses ayant les mêmes axes en position, et la droite qui les joint sera normale à une ellipse ayant aussi les mêmes axes en position. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME VI. — *Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, les normales aux sommets concourent en un point P qui décrit une ellipse; le centre de gravité du triangle, le point de concours des hauteurs, le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle des neuf points décrivent des ellipses, et les droites qui joignent le point P à ces points, ainsi que la droite qui joint ces points, sont normales à autant d'ellipses fixes.*

Reprenons les équations (2) et (4); elles nous donnent encore

$$\begin{aligned} y_1 y_2 y_3 y_4 &= \frac{-b^6 \beta^2}{(a^2 - b^2)^2}, \\ -y_1 y_2 y_3 y_4 &= \frac{b^4 [(a^2 + C)^2 - 4a^2 A^2]}{(a^2 - b^2)^2}; \end{aligned}$$

on en tire

$$b^2 \beta^2 = (a^2 + C)^2 - 4a^2 A^2,$$

mais on a

$$2A = \frac{b^2 + k}{a^2 + k} \alpha,$$

donc

$$(a^2 + C)^2 = a^2 \alpha^2 \left(\frac{b^2 + k}{a^2 + k} \right)^2 + b^2 \beta^2 = (b^2 + k)^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right),$$

d'où

$$\begin{aligned} a^2 + C &= -b^2 - k, \\ C &= -k - (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, le centre des ellipses a une puissance constante par rapport au cercle circonscrit au triangle, qui a, par conséquent, pour enveloppe une anallagmatique du quatrième degré.*

Lorsque la quantité k varie, toutes ces courbes du quatrième degré restent tangentes à l'ellipse donnée en ses quatre sommets. Supposons, en particulier, que la puissance C soit nulle, ce qui donne pour k la valeur $-(a^2 + b^2)$; les valeurs $2A$, $2B$ deviennent alors

$$\begin{aligned} 2A &= -x_1, \\ 2B &= -y_1. \end{aligned}$$

Le cercle dont il s'agit est alors décrit sur un demi-diamètre de l'ellipse comme diamètre. Ce cercle, qui passe par les pieds B, C, D des trois normales issues du point P , passe par le point A' , symétrique du pied A de la normale singulière par rapport au centre de l'ellipse. Prenons les demi-diamètres conjugués des droites OB, OC, OD ; ces trois demi-diamètres détermineront sur l'ellipse trois points B', C', D' , et les normales en ces trois points seront concourantes; soit P' leur point de concours: il est facile de voir qu'il est sur l'ellipse. Soit k le point où la normale en B' rencontre le grand axe; le demi-diamètre OB , perpendiculaire à cette normale, a

une longueur égale à $\frac{b}{a}$ B'K; si donc nous faisons tourner de 90° autour du point O le cercle OBCD, les droites OB, OC, OD deviendront parallèles aux trois normales issues du point P', et le diamètre OA' de ce cercle deviendra parallèle à la normale qui a son pied en P'. Donc, si sur les normales issues de P' on prend des longueurs proportionnelles aux segments B'K interceptés entre l'axe et les pieds des normales, ou, plus généralement, entre les pieds des normales et l'une de nos ellipses, les extrémités de ces droites seront sur un cercle tangent à l'ellipse en P', le centre de ce cercle sera sur l'une de nos ellipses, et la normale issue de ce point et ayant son pied en P' sera la normale singulière correspondante. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — *Si l'on décrit un cercle sur un rayon OA' de l'ellipse comme diamètre, il rencontre l'ellipse en trois points B, C, D, les normales en ces trois points sont concourantes, et les trois normales aux points B', C', D', extrémités des demi-diamètres conjugués de OB, OC, OD, concourent sur l'ellipse.*

Reprenons l'étude d'un triangle BCD qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position; nous nous proposons de calculer les longueurs de ses côtés; le problème, attaqué directement, donne lieu à des calculs à peu près impraticables; nous allons établir, à l'aide des théorèmes précédents, des relations très simples entre les longueurs de ces côtés. Proposons-nous de calculer le carré du rayon du cercle circonscrit au triangle; rappelons que les normales à l'ellipse aux points B, C, D concourent en un point P ayant pour coordonnées α, β ; en considérant l'ellipse (E) qui passe au point P et qui correspond

à la valeur k , et appelant x_1, y_1 les coordonnées du pied de la normale singulière issue du point P, A et B les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle BCD, R le rayon de ce cercle, on a, en se reportant aux formules précédemment établies,

$$C = -(a^2 + b^2 + k) = A^2 + B^2 - R^2,$$

d'où

$$(\lambda) \quad R^2 = a^2 + b^2 + k + \frac{1}{4} \left[x_1^2 \frac{(b^2 + k)^2}{a^4} + y_1^2 \frac{(a^2 + k)^2}{b^4} \right].$$

Comme le point (x_1, y_1) est sur l'ellipse, on voit que l'expression contient le seul paramètre y_1^2 au premier degré.

En appelant x, y les coordonnées du centre de gravité du triangle BCD, $\varnothing$ la distance du centre de gravité au centre du cercle circonscrit et Σ^2 la somme des carrés des côtés du triangle, on a

$$\Sigma^2 = 9(R^2 - \varnothing^2),$$

$$\varnothing^2 = (A - x)^2 + (B - y)^2,$$

$$\Sigma^2 = 9(a^2 + b^2 + k - x^2 - y^2 + 2Ax + 2By).$$

En remplaçant x, y, A, B par les valeurs qui ont été données plus haut, on trouve, après quelques simplifications,

$$(\mu) \quad \begin{cases} \frac{\Sigma^2}{9} = a^2 + b^2 + k - \frac{2y_1^2}{9b^2c^2}(a^2 + b^2 + 2k)^2 \\ \quad + \frac{a^2 + b^2 + 2k}{3c^2} \left(b^2 + k - a^2 \frac{a^2 + b^2 + 2k}{3c^2} \right). \end{cases}$$

On voit que cette expression est encore une fonction linéaire du paramètre y_1^2 .

Enfin, cherchons à calculer la surface du triangle BCD. Rappelons que la surface du triangle dont les sommets ont pour coordonnées $x_4, y_4; x_2, y_2; x_3, y_3$

est donnée par l'égalité

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Or ici on a

$$x_4 = \frac{a^2 x y_4}{b^2 \beta + c^2 y_4};$$

on trouve alors

$$\frac{2S}{b^2 c^2 a^2 \alpha \beta} = \frac{(y_2 - y_4)(y_3 - y_2)(y_4 - y_3)}{(b^2 \beta + c^2 y_4)(b^2 \beta + c^2 y_2)(b^2 \beta + c^2 y_3)}.$$

Les quantités y_4, y_2, y_3 sont données par une équation facile à former, et l'on trouve, après un calcul assez long et qu'il est inutile de rapporter,

$$(\nu) \quad \frac{S^2}{a^2} = y_1^2 \left(\frac{a^2 + b^2 + 2k}{c^2} \right)^3 - \frac{b^2}{c^2} (b^2 + k) \left(2 + \frac{b^2 + k}{c^2} \right)^2.$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME IX. — *Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, il existe deux relations linéaires entre le carré de la surface, le carré du rayon du cercle circonscrit et la somme des carrés des trois côtés.*

Le théorème que nous venons d'établir donne la solution d'un grand nombre de questions particulières; nous allons appliquer nos formules à quelques cas simples. Remarquons d'abord que, si le coefficient du paramètre variable y_1^2 , qui définit le triangle dans chacune de ses positions, est nul, la fonction correspondante R^2 , Σ^2 ou S^2 est constante.

Égalons, par exemple, à zéro le coefficient de y_1 dans

l'expression (λ) qui donne R^2 ; nous aurons

$$\frac{(\alpha^2 + k)^2}{b^4} - \frac{(b^2 + k)^2}{a^2 b^2} = 0,$$

d'où l'on tire

$$k = \alpha^2 + ab + b^2$$

et

$$k = ab - \alpha^2 - b^2.$$

La seconde valeur convient seule; elle correspond au cas où le triangle BCD est inscrit dans l'ellipse et circonscrit à un cercle concentrique; en transportant cette valeur de k dans les expressions de Σ^2 et de S^2 , on obtient les valeurs de ces quantités en fonction du paramètre variable γ_1^2 .

Si l'on considère le coefficient de γ_1^2 dans les expressions générales de Σ^2 et de S^2 , on voit qu'il est nul pour la même valeur $k = -\frac{\alpha^2 + b^2}{2}$ dans les deux expressions.

On voit donc que, quand un triangle est inscrit dans une ellipse et circonscrit à une ellipse homothétique et dont les axes sont deux fois plus petits, non seulement sa surface est constante, comme on le sait, mais aussi la somme des carrés de ses côtés, résultat très facile à vérifier par un calcul direct. On trouve alors pour R^2 l'expression

$$R^2 = \frac{(3\alpha^2 + b^2)^2}{16a^2} + \gamma_1^2 \frac{c^6}{16a^2 b^4}.$$

Prenons un autre cas particulier. Supposons que les deux coniques auxquelles le triangle reste inscrit et circonscrit soient homofocales : on sait, d'après un beau théorème de M. Chasles, que le triangle est alors de périmètre constant; mais alors l'expression de S^2 et celle de Σ^2 nous montrent, après l'élimination de γ_1^2 , qu'il existe une relation linéaire entre la somme des produits deux à deux des côtés et le produit de ces mêmes côtés. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME X. -- *Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses homofocales, il existe une relation linéaire entre le produit de ses côtés et la somme de leurs produits deux à deux.*

Pour trouver cette relation numérique, il faut d'abord calculer le périmètre constant du triangle ; on trouve

$$p = \frac{b^2}{a^2 - b^2} \sqrt{2 \sqrt{b^4 + a^2(a^2 - b^2)} - a^2 - b^2} \\ + \sqrt{2a^2 - b^2 + 2 \sqrt{b^4 + a^2(a^2 - b^2)}}.$$

On peut remarquer que le carré de p ne contient qu'un seul radical, qui est

$$\sqrt{b^4 + a^2(a^2 - b^2)}.$$

Il faut trouver la valeur de k ; pour cela, nous nous servirons des formules générales qui lient la valeur de k aux longueurs des axes des deux ellipses auxquelles le triangle reste inscrit et circonscrit ; ces relations sont, en appelant a, b, a', b' les demi-axes des deux ellipses,

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 1,$$

$$a^2 + k = \frac{a'}{a} (a^2 - b^2),$$

$$b^2 + k = \frac{-b'}{b} (a^2 - b^2).$$

Ces formules donnent immédiatement l'équation de l'ellipse décrite par le point de concours des normales ; cette ellipse a pour demi-axes

$$a' \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad b' \frac{a^2 - b^2}{b^2}.$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, on trouve

pour a' la valeur

$$a' = \frac{-ab^2 + \sqrt{b^4 + a^2(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}$$

et pour k la valeur

$$k = \sqrt{b^4 + a^2(a^2 - b^2)} - a^2 - b^2.$$

En transportant cette valeur de k ainsi que la valeur de p dans les expressions de S^2 et de Σ^2 , puis en éliminant y_1^2 entre ces deux relations, on trouve la relation assez compliquée, mais linéaire, entre le produit des côtés du triangle et la somme de leurs produits deux à deux. Les longueurs des trois côtés du triangle variable sont donc représentées par une équation de la forme

$$X^3 - 2pX^2 + \lambda X + m\lambda + p = 0,$$

équation dans laquelle λ est le seul paramètre variable.

Reprenons l'étude générale d'un triangle qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position. En se reportant aux notations précédentes et en considérant le triangle BCD, on voit que les points de contact des côtés de ce triangle avec leur enveloppe forment un triangle $B_1C_1D_1$ ayant les mêmes propriétés que le premier; ce triangle donne à son tour naissance à un triangle $B_2C_2D_2$, et ainsi de suite. Nous nous proposons d'étudier l'ensemble de tous ces triangles. Considérons d'abord les ellipses enveloppes des côtés de ce triangle et les quantités k qui leur correspondent. Entre deux ellipses consécutives, on a les relations

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 1,$$

$$k = a^2 - \frac{a'}{a}(a^2 - b^2) = b^2 + \frac{b'}{b}(a^2 - b^2).$$

L'ellipse suivante aura pour demi-axes $\frac{a'^2}{a}, \frac{b'^2}{b}$. Donc, en posant $\frac{a'}{a} = \lambda$, on aura, pour déterminer la suite des axes et les quantités k , les relations

$$\begin{aligned} a' &= \lambda a, & b' &= (1 - \lambda) b, \\ a'' &= \lambda^2 a, & b'' &= (1 - \lambda)^2 b, \\ &\dots\dots\dots, & & \\ a^{(m)} &= \lambda^m a, & b^{(m)} &= (1 - \lambda)^m b. \\ k_1 &= a^2 - \lambda(a^2 - b^2) = a^2(1 - \lambda) + \lambda b^2, \\ k_2 &= (1 - \lambda)\lambda^2 a^2 + \lambda b^2(1 - \lambda)^2, \\ &\dots\dots\dots, \\ k_m &= (1 - \lambda)\lambda^m a^2 + \lambda b^2(1 - \lambda)^m. \end{aligned}$$

Pour déterminer complètement les triangles les uns par rapport aux autres, il faut déterminer la relation qui existe entre les ordonnées des pieds des normales singulières relatives aux deux points P et P₁ où viennent se rencontrer les normales en B, C, D et en B₁, C₁, D₁, sommets de deux triangles consécutifs. Si l'on appelle x_2, γ_2 les coordonnées du point B situé sur l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} = 1$, et (x', β') les coordonnées du point de rencontre des normales menées aux points C₁, D₁ à l'ellipse enveloppe des côtés du triangle BCD, on a les relations connues

$$\beta' = \frac{(a'^2 - b'^2)\gamma_2(x_2^2 - a'^2)}{a'^2\gamma_2^2 + b'^2x_2^2}, \quad x' = \dots,$$

et, en remplaçant x_2 par sa valeur en fonction de γ_2 , puis chassant le dénominateur, on a une relation du troisième degré en γ_2 qui doit donner à la fois les ordonnées des trois points B, C, D. On a, pour somme des racines,

$$\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = \frac{-\left(a'^2 - b'^2 \frac{b^2}{a^2}\right)\beta'}{\frac{b^2}{a^2}(a'^2 - b'^2)}.$$

En remplaçant cette somme des racines par sa valeur en fonction de β , ordonnée du point de concours des normales en B, C, D, valeur tirée des calculs faits au commencement, on voit qu'il existe deux relations de la forme

$$\beta = \lambda \beta', \quad \alpha = \mu \alpha'.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME XI. — *Si l'on considère un triangle qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, les normales aux sommets de ce triangle concourent en un point P, les normales aux points de contact de ses côtés avec leur enveloppe concourent en P₁, et ainsi de suite; tous les points P, P₁, ... décrivent des ellipses, et les droites qui joignent entre eux de toutes les manières les points P, P₁, ..., les centres des cercles circonscrits à tous les triangles que l'on déduit du premier, les points de concours de leurs hauteurs, les centres de gravité, etc., se déplacent en restant normales à autant d'ellipses fixes.*

En reprenant nos formules, nous trouvons

$$\gamma'_1 = \gamma_1 \frac{(1-\lambda)(1-2\lambda)b^4}{a^4\lambda^2 - b^4(1-\lambda)^2} = \gamma_1 \frac{(1-\lambda)(1-2\lambda)}{\frac{a^4}{b^4}\lambda^2 - (1-\lambda)^2}.$$

Pour passer au triangle suivant, il faudra changer $\frac{a^4}{b^4}$ en $\frac{a^4}{b^4} \times \frac{\lambda^4}{(1-\lambda)^4}$; l'expression de γ''_1 peut se mettre sous la forme

$$\gamma''_1 = \frac{\gamma'_1}{U\lambda + V},$$

en posant

$$U = \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)(1-2\lambda)} \frac{a^4}{b^4},$$

$$z = \frac{\lambda^4}{(1-\lambda)^4},$$

$$V = \frac{\lambda-1}{1-2\lambda}.$$

On aura alors

$$y_1''' = \frac{y_1''}{U z^2 + V},$$

$$y_1'' = \frac{y_1'}{U z^2 + V}.$$

On a donc, pour l'expression générale de $y_1^{(m)}$,

$$y_1^{(m)} = \frac{y_1}{(U+V)(Uz+V)(Uz^2+V)\dots(Uz^{m-1}+V)}.$$

D'après cela, nous pouvons calculer les quantités R^2 , S^2 , Σ^2 relatives au $m^{\text{ième}}$ triangle, déduit du triangle BCD, en fonctions de quantités connues; l'ordonnée $\beta^{(m)}$ du point de concours des normales aux sommets de ce $m^{\text{ième}}$ triangle est donnée par la relation

$$\beta^{(m)} = (\lambda-1) \frac{\lambda^{2m} a^2 - (1-\lambda)^{2m} b^2}{(1-\lambda)^{2m} b^2} y_1^{(m)}.$$

On pourra donc, à l'aide de ces formules, calculer les éléments de l'un quelconque des triangles de la suite considérée, en fonction des éléments du premier triangle. On peut se proposer, relativement aux diverses quantités qui figurent dans cette question, divers problèmes d'Analyse plus ou moins intéressants; on peut, par exemple, chercher l'équation de la courbe qui passe par les points, en nombre infini, où viennent se croiser les trois normales aux sommets de chacun des triangles déduits successivement du premier; quand le premier

triangle est défini, chacun de ces points est connu, et la courbe qui les contient tous est définie.

La question générale que nous avons traitée, et qui se rapporte à un triangle quelconque inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, peut aussi être envisagée comme une question de maximum ou de minimum, et c'est ce que nous allons démontrer.

Considérons une ellipse donnée A, et un triangle MNP inscrit dans cette ellipse et tel qu'une fonction symétrique des éléments de ce triangle soit maximum ou minimum; supposons qu'un *point quelconque* de l'ellipse puisse être pris pour l'un des sommets du triangle répondant à ce maximum ou ce minimum : ce premier sommet étant pris au hasard sur l'ellipse, le triangle minimum correspondant sera complètement déterminé et *d'une seule manière*; donc il y aura une infinité de triangles répondant au maximum, et tous ces triangles inscrits à l'ellipse seront en même temps circonscrits à une ellipse qui, par raison de symétrie, aura les mêmes axes en position que l'ellipse donnée; la fonction qui sera maximum pour tous ces triangles qui se déplacent d'une manière *continue* sera nécessairement *constante*. On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉOREME XII. — *Si un point quelconque d'une ellipse peut être pris pour l'un des sommets d'un triangle inscrit et qui soit tel qu'une fonction symétrique donnée de ses éléments soit maximum ou minimum, il existe une infinité de ces triangles qui sont tous circonscrits à une ellipse ayant les mêmes axes en position, et la fonction considérée est constante pour tous ces triangles.*

Les cas particuliers les plus simples du théorème que

nous venons d'énoncer sont bien connus : ce sont les cas où la fonction donnée est la surface ou le périmètre du triangle. Il est important de remarquer que, *en général*, on ne peut prendre pour l'un des sommets d'un triangle répondant à la question de maximum ou de minimum un point quelconque de l'ellipse, et il est facile de se rendre compte de ce fait. Cherchons, par exemple, à inscrire dans l'ellipse un triangle dont la somme des carrés des côtés soit maximum : il est facile de voir que les normales à l'ellipse aux sommets de ce triangle devront être les médianes du triangle. Or, un point étant pris au hasard sur l'ellipse, on ne peut construire un triangle ayant son sommet en ce point et dont les médianes soient les normales aux trois sommets. Au contraire, un point étant pris au hasard sur l'ellipse, on peut construire un triangle inscrit ayant un sommet en ce point et dont les hauteurs ou les bissectrices soient les normales aux trois sommets, et ces deux cas sont précisément ceux du triangle de surface maximum et du triangle de périmètre maximum.

Considérons un triangle ABC donné et qui reste fixe ; d'après les théorèmes que nous avons établis, il existe une infinité de systèmes de deux coniques ayant les mêmes axes en position, et dont l'une est inscrite et l'autre circonscrite à ce triangle ; l'un de ces systèmes étant choisi, les normales en A, B, C à la conique circonscrite concourent en un point P. Nous nous proposons d'étudier le lieu de ce point P quand le système des coniques varie.

Nous allons d'abord établir une proposition de Géométrie élémentaire qui peut être utile dans certains cas. Cette proposition est la suivante :

THÉORÈME XIII. — *Si l'on considère un triangle ABC et un point P pris dans son plan ; si l'on projette ce*

point en Q, R, S sur les trois côtés et si l'on considère le triangle A'B'C', dont les côtés sont les perpendiculaires élevées en A, B, C aux droites PA, PB, PC, les deux rapports

$$(1) \quad \frac{QB \cdot SA \cdot RC}{QC \cdot SB \cdot RA},$$

$$(2) \quad \frac{A'B \cdot C' \cdot A'B'C}{C'B \cdot B'A \cdot A'C}$$

sont égaux.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer que les triangles semblables donnent les égalités

$$\frac{QC}{PC} = \frac{BA'}{PA'}, \quad \frac{QB}{PB} = \frac{CA'}{PA'},$$

d'où

$$\frac{QC}{QB} = \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{PC}{PB}.$$

En écrivant deux autres égalités analogues, on a le théorème énoncé, qui s'applique au cas, plus général, où les perpendiculaires seraient remplacées par des droites faisant avec les droites considérées un même angle donné quelconque. (A suivre.)