

MORET-BLANC

**Solution de la question proposée en
1879 pour le concours d'admission à
l'École polytechnique**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 65-73

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__65_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE EN 1879 POUR LE
CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;**

PAR M. MORET-BLANC,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée du Havre.

On donne une conique rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1,$$

et un point M sur cette conique ; par les extrémités d'un diamètre quelconque de la courbe et le point M on fait passer un cercle : prouver que le lieu décrit par le centre de ce cercle est une conique K passant par l'origine O des axes.

Si autour du point O on fait tourner deux droites rectangulaires, elles rencontrent la conique K en deux points : prouver que le lieu des points de rencontre des tangentes menées en ces points est la droite perpen-

diculaire au segment OM et passant par le milieu de ce segment.

Par le point O on peut mener, indépendamment de la normale qui a son pied au point O, trois autres normales à la conique K :

1° Dans le cas particulier où la conique donnée est une hyperbole équilatère et où l'on a $A = 1$ et $B = -1$, montrer qu'une seule de ces normales est réelle et calculer les coordonnées de son pied.

2° Dans le cas général, trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds de ces trois normales.

Soient x_0, y_0 les coordonnées du point M et

$$y = mx$$

l'équation d'un diamètre de la conique. Celle d'un cercle passant par les extrémités de ce diamètre et par le point M sera de la forme

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 + \lambda(y - mx)(y + mx - y_0 - mx_0) = 0,$$

en remarquant que les sécantes communes à une conique et à un cercle sont également inclinées sur les axes de la conique.

L'équation développée devient

$$\left(\frac{1}{A} - \lambda m^2\right)x + \left(\frac{1}{B} + \lambda\right)y^2 - \lambda(y_0 + mx_0)(y - mx) = 0.$$

La condition pour qu'elle représente un cercle est

$$\frac{1}{A} - \lambda m^2 = \frac{1}{B} + \lambda, \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}{1 + m^2};$$

l'équation du cercle est donc

$$\left(\frac{1}{A} + \frac{m^2}{B}\right)(x^2 + y^2) + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)(y_0 + mx_0)(y - mx) = 0.$$

Les coordonnées de son centre sont déterminées par les deux équations

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{A} + \frac{m^2}{B}\right)x - \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)m(y_0 + mx_0) &= 0, \\ 2\left(\frac{1}{A} + \frac{m^2}{B}\right)y + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)(y_0 + mx_0) &= 0. \end{aligned}$$

Ajoutant à la première la seconde multipliée par m , on a l'équation

$$x + my = 0,$$

qui peut remplacer la première, et qu'on aurait pu écrire *a priori*, car elle représente la perpendiculaire élevée par le point O sur le diamètre $y - mx = 0$ de la conique, qui est une corde du cercle.

On en tire

$$m = -\frac{x}{y};$$

substituant cette valeur dans la seconde équation, il vient

$$\frac{x^2}{B} + \frac{y^2}{A} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)(y_0 y - x_0 x) = 0,$$

ou

$$(1) \quad Ax^2 - By^2 + \frac{A-B}{2}(y_0 y - x_0 x) = 0,$$

équation du lieu des centres des cercles : c'est une conique passant par l'origine, de même espèce que la proposée, et qui lui deviendrait homothétique en la faisant tourner de 90° .

L'équation du système de deux droites rectangulaires menées par l'origine étant

$$y^2 + kxy - x^2 = 0,$$

l'équation

$$(B + \lambda)y^2 + \lambda kxy + (A - \lambda)x^2 + \frac{A-B}{2}(y_0 y - x_0 x) = 0$$

sera celle d'une conique passant par l'intersection de la conique K et du système des deux droites. On peut déterminer λ de manière que cette conique se réduise à la tangente en O à la conique K,

$$y_0 y - x_0 x = 0,$$

et à une seconde droite passant par l'intersection des côtés de l'angle droit avec cette conique. Il faut et il suffit pour cela que l'ensemble des termes du second degré soit divisible par $y_0 y - x_0 x$, c'est-à-dire qu'on ait

$$(B + \lambda)y^2 + (A - \lambda)x^2 + \lambda k xy = (y_0 y - x_0 x)(ny + mx),$$

d'où

$$B + \lambda = n y_0, \quad A - \lambda = -m x_0, \quad \lambda k = m y_0 - n x_0,$$

et par suite

$$\begin{aligned} n &= \frac{\lambda + B}{y_0}, \quad m = -\frac{\lambda - A}{x_0}, \\ \lambda k &= \frac{(\lambda - A)y_0}{x_0} - \frac{(\lambda + B)x_0}{y_0}, \\ \lambda &= \frac{Bx_0^2 + Ay_0^2}{k(y_0^2 - x_0^2 - kx_0y_0)}. \end{aligned}$$

k n'entrant que dans λ , on peut conserver λ comme seul paramètre variable,

$$mx + ny = (\lambda - A)\frac{x}{x_0} + (\lambda + B)\frac{y}{y_0},$$

et l'équation de la droite cherchée est

$$\lambda \left(\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} \right) + B \frac{y}{y_0} - A \frac{x}{x_0} + \frac{A - B}{2} = 0.$$

Elle passe par le point fixe déterminé par les deux équations

$$\begin{aligned} \frac{y}{y_0} + \frac{x}{x_0} &= 0, \\ B \frac{y}{y_0} - A \frac{x}{x_0} + \frac{A - B}{2} &= 0, \end{aligned}$$

dont les coordonnées sont

$$x_1 = \frac{A-B}{2(A+B)} x_0, \quad y_1 = -\frac{A-B}{2(A+B)} y_0.$$

La polaire de ce point par rapport à la conique K est

$$\left[2Ax_1 - \frac{A-B}{2} x_0 \right] x + \left[2By_1 + \frac{A-B}{2} y_0 \right] y + \frac{A-B}{2} (y_0 x_1 - x_0 x_1) = 0.$$

En mettant pour x_1 et y_1 leurs valeurs, il vient, réductions faites,

$$x_0 x + y_0 y - \frac{x_0^2 + y_0^2}{2} = 0,$$

équation d'une droite perpendiculaire sur le milieu de OM, et qui est le lieu des points de concours des tangentes menées à la conique K par les points où elle est rencontrée par les côtés d'un angle droit pivotant autour du point O. Il est remarquable que ce lieu soit indépendant des axes de la conique donnée et qu'il reste le même pourvu que le centre O et le point M restent fixes.

L'équation de la normale à la conique K au point (x, y) est

$$Y - y = \frac{4By + (A-B)y_0}{4Ax - (A-B)x_0} (X - x).$$

Si elle passe par l'origine, les coordonnées de son pied satisfont à l'équation

$$4(A-B)xy - (A-B)(y_0 x + x_0 y) = 0$$

ou

$$(2) \quad 4xy - y_0 x - x_0 y = 0.$$

C'est le lieu des pieds des normales menées du point O à toutes les coniques K que l'on obtient en faisant varier la grandeur des axes de la conique donnée.

1° Dans le cas particulier où $A = 1$, $B = -1$, l'équation de la conique donnée est

$$x^2 - y^2 = 1,$$

et l'on a

$$x_0^2 - y_0^2 = 1.$$

L'équation de la conique K devient

$$x^2 - y^2 + y_0 y - x_0 x = 0.$$

En éliminant y entre cette équation et l'équation (4), et supprimant la solution $x = 0$, on a l'équation

$$16x^3 - 24x_0x^2 + (9x_0^2 + 3y_0^2)x - x_0(x_0^2 + y_0^2) = 0,$$

qui détermine les abscisses des pieds des trois normales autres que celle qui a son pied en O .

En posant $x = x' + \frac{x_0}{2}$, elle devient, eu égard à $x_0^2 - y_0^2 = 1$,

$$16x'^3 - 3x' - \frac{1}{2}x_0 = 0$$

ou

$$x'^3 - \frac{3}{16}x' - \frac{x_0}{32} = 0,$$

de la forme $x'^3 + px' + q = 0$. L'expression

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

devient ici $\frac{y_0^2}{64^2} > 0$. L'équation n'a qu'une racine réelle, calculable par la formule de Cardan :

$$x' = \frac{\sqrt[3]{x_0 + y_0} + \sqrt[3]{x_0 - y_0}}{4},$$

$$x = \frac{x_0}{2} + x'.$$

On a ensuite

$$y = \frac{y_0 x}{4x - x_0};$$

on trouverait d'ailleurs

$$y = \frac{y_0}{2} + \frac{\sqrt[3]{x_0 + y_0} - \sqrt[3]{x_0 - y_0}}{4}.$$

2° Revenons au cas général, et soit

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + S = 0, \quad S = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$$

l'équation du cercle passant par les pieds des trois normales autres que celle qui a son pied en O.

En reportant la valeur $y = \frac{y_0 x}{4x - x_0}$, tirée de l'équation (2), d'abord dans celle du cercle, puis dans celle de la conique K, et supprimant la solution $x = 0$, on a les deux équations

$$\begin{array}{r|l} 16x - 8x_0 & x^3 + 16\alpha x_0 - x^2 - 2\alpha x_0^2 \\ - 32\alpha & - 8\beta y_0 + 2\beta y_0 x_0 \\ & - 16S - 8x_0 S \\ & + x_0^2 \\ & + y_0^2 \end{array} \quad \left| \quad x + x_0 S = 0, \right.$$

$$\begin{aligned} 16Ax^3 - 8(2A - B)x_0x^2 - [(SA - 4B)x_0' + (2A - B)y_0^2]x \\ + \frac{A - B}{2}x_0(x_0^2 + y_0^2) = 0, \end{aligned}$$

qui déterminent les abscisses des points d'intersection de l'hyperbole (2) avec le cercle et avec la conique K. La première doit admettre les trois racines de la seconde. Écrivant que le reste de la division de leurs premiers membres est nul quel que soit x , on a, pour déterminer α, β et S , les trois équations du premier degré

$$16A^2S - 16ACx_0\alpha - 8A^2y_0\beta + 4C^2x_0^2 - ACy_0^2 = 0,$$

$$8A^2x_0S - 8ACx_0'\alpha - 2A(A + C)y_0^2\alpha$$

$$- 2A^2x_0y_0\beta + 2C^2x_0^3 + \frac{C^2}{2}x_0y_0^2 = 0,$$

$$A^2x_0^2S - ACx_0(x_0^2 + y_0^2)\alpha + \frac{C^2}{4}x_0^2(x_0^2 + y_0^2) = 0,$$

(72)

où

$$C = A - B.$$

On en tire

$$\alpha = -\frac{A^2 - 3AB + 2B^2}{8AB}x_0, \quad \beta = -\frac{2A^2 - 3AB + B^2}{8AB}y_0,$$

$$S = -\frac{(A - B)^2}{8AB}(x_0^2 + y_0^2)$$

L'équation du cercle passant par les pieds des trois normales considérées est donc

$$(4) \quad \begin{cases} 8AB(x^2 + y^2) + 2(A^2 - 3AB + 2B^2)x_0x \\ + 2(2A^2 - 3AB + B^2)y_0y - (A - B)^2(x_0^2 + y_0^2) = 0. \end{cases}$$

On arrive plus rapidement à cette équation de la manière suivante.

L'équation de la conique K peut s'écrire

$$x[2Ax - (A - B)x_0] + y[2By + (A - B)y_0].$$

Si l'on y remplace successivement le facteur y et le facteur x par les valeurs $y = \frac{y_0 x}{4x - x_0}$, $x = \frac{x_0 y}{4y - y_0}$, tirées de l'équation (2), on a, en chassant les dénominateurs et supprimant la solution $x = 0, y = 0$, relative au point O, les deux équations

$$\begin{aligned} & [2Ax - (A - B)x_0](4x - x_0) \\ & + [2By + (A - B)y_0]y_0 = 0, \\ & [2Ax - (A - B)x_0]x_0 + [2By + (A - B)y_0](4y - y_0) = 0, \end{aligned}$$

qui doivent être vérifiées par les coordonnées des pieds des trois normales considérées. En ajoutant ces équations multipliées respectivement par B et par A, afin de réduire au même coefficient les termes en x^2 et y^2 , on a

$$\begin{aligned} & 8AB(x^2 + y^2) + 2(A^2 - 3AB + 2B^2)x_0x \\ & + 2(2A^2 - 3AB + B^2)y_0y - (A - B)^2(x_0^2 + y_0^2) = 0, \end{aligned}$$

équation du cercle passant par les pieds des trois normales : c'est l'équation trouvée plus haut.

Note. — La même question a été résolue par MM. H. Lez et A. Leinekugel.