

C. HENRY

Sur le calcul des dérangements

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 5-9

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__5_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR LE CALCUL DES DÉRANGEMENTS;

PAR M. C. HENRY.

Lorsque, dans une permutation rectiligne des n premiers nombres, un nombre quelconque précède un autre nombre plus petit que lui, on dit qu'il y a *dérangement*.

Importante dans la théorie des déterminants, la considération des dérangements vient de trouver une nouvelle source d'actualité dans le jeu du *Taquin*, dont le problème bien connu consiste à replacer dans l'ordre numérique naturel, sur un carré de seize cases, quinze pions placés dans un ordre quelconque. Les résultats démontrés sont, comme on sait ⁽¹⁾, les suivants : sur le nombre des permutations, la moitié peut être rangée

Fig. 1.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Fig. 2.

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
	15	14	13

dans l'ordre indiqué *fig. 1*, l'autre moitié dans l'ordre indiqué *fig. 2*.

(¹) Voyez notre article de la *Gazette anecdotique* (15 août 1880).

Il nous a paru intéressant de donner à ce propos une solution du problème suivant, qui a été proposé par M. Joseph Bertrand ⁽¹⁾:

Combien y a-t-il en tout de dérangements dans le tableau des permutations des n premiers nombres ?

Désignant ce nombre total par D_n , on a évidemment

$$D_1 = 0.$$

Les permutations des deux premiers nombres sont 12, 21. La première n'offre pas de dérangement; la seconde en offre un; donc

$$D_2 = 1.$$

Pour calculer D_3 , écrivons trois fois les permutations des deux premiers nombres. Mettons un point à la suite de chacune des deux permutations et faisons-le avancer successivement :

$$\begin{array}{rcl} 12. & 21. & \\ 1.2 & 2.1 & \\ .12 & .21 & . \end{array}$$

Remplaçons le point par le chiffre 3. Si nous mettons ce chiffre à la fin de la permutation, il n'y a pas de dérangement. Lorsque nous le mettons au deuxième rang, nous introduisons un dérangement et un seul. Lorsque le chiffre 3 arrive au premier rang, nous introduisons deux dérangements. Donc, en désignant généralement par P_n le nombre des permutations de n nombres, nous obtenons $0 + 1 + 2$ dérangements pour trois permutations de deux nombres, ou $3P_2$, et, en ajoutant les dérangements provenant du tableau des permutations

(1) *Traité d'Algèbre*, 1^{re} édition, p. 146; II^e Partie, 6^e édition, p. 53.

(7)

des deux premiers nombres, ou $3D_2$, nous avons

$$D_3 = 3D_2 + (1 + 2)P_2.$$

Pour calculer D_4 , supposons formé le tableau des permutations des trois premiers nombres. Écrivons-le quatre fois, en intercalant un point, comme précédemment. Le nombre des dérangements, D_3 , sera quatre fois dans le tableau : $4D_3$. Au lieu du point écrivons le chiffre 4. Quand le point est à la fin, point de dérangement; quand il est au troisième rang, nous introduisons un dérangement; quand il est au deuxième rang, nous introduisons deux dérangements; quand il est au premier rang, nous introduisons trois dérangements. En somme, nous introduisons pour six permutations de trois nombres, ou $(1 + 2 + 3)P_3$, 0 + 1 + 2 + 3 dérangements, et, en ajoutant $4D_3$, nous avons

$$D_4 = 4D_3 + (1 + 2 + 3)P_3.$$

De même,

$$D_5 = 5D_4 + (1 + 2 + 3 + 4)P_4.$$

Généralement,

$$D_{n+1} = (n + 1)D_n + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)P_n$$

ou

$$D_{n+1} = (n + 1)D_n + \frac{n(n + 1)}{2}P_n.$$

En divisant cette dernière équation par $(n + 1)P_n = P_{n+1}$, il vient

$$\frac{D_{n+1}}{P_{n+1}} = \frac{D_n}{P_n} + \frac{n}{2},$$

et, en remplaçant successivement dans cette formule n

par 1, 2, 3, . . . ,

$$\frac{D_2}{P_2} = \frac{D_1}{P_1} + \frac{1}{2},$$

$$\frac{D_3}{P_3} = \frac{D_2}{P_2} + \frac{2}{2},$$

$$\frac{D_4}{P_4} = \frac{D_3}{P_3} + \frac{3}{2},$$

.....,

$$\frac{D_n}{P_n} = \frac{D_{n-1}}{P_{n-1}} + \frac{n-1}{2}.$$

Si nous additionnons membre à membre ces différentes équations, il vient, puisque $D_1 = 0$,

$$\frac{D_n}{P_n} = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)}{2}.$$

ou

$$D_n = \frac{P_n [n(n-1)]}{4} = \frac{P_n C_n^2}{2}.$$

Ainsi, le nombre total des dérangements est égal à la moitié du produit du nombre des permutations par le nombre des combinaisons des n nombres deux à deux.

Autre démonstration. — Considérons une permutation quelconque P_n ; écrivons à côté la permutation renversée : à un dérangement de la première dans une combinaison de deux nombres correspond un non-dérangement de la seconde. Donc, si l'on écrit le tableau des permutations de n nombres, puis à côté le tableau des permutations dans l'ordre renversé, le nombre des dérangements dans le premier tableau est égal au nombre des non-dérangements du second, et réciproquement. Mais, dans chacune des permutations du premier et du second tableau, le nombre des dérangements et des non-dérangements est égal au nombre des combinaisons

(9)

de n objets pris deux à deux, ou C_n^2 ; par suite, le nombre total des dérangements ou des non-dérangements est égal à $P_n C_n^2$. Mais le nombre des dérangements de l'un égale le nombre des non-dérangements de l'autre, et inversement; donc

$$D_n = \frac{P_n C_n^2}{2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$