

E. HUNYADY

Sur la détermination du cercle osculateur d'une courbe à double courbure

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 53-55

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__53_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA DÉTERMINATION DU CERCLE OSCULATEUR D'UNE COURBE A DOUBLE COURBURE;

PAR M. E. HUNYADY,

Professeur à l'École polytechnique de Budapest.

En désignant par x, y, z les coordonnées orthogonales d'un point d'une courbe à double courbure, par α, β, γ et r les coordonnées du centre et le rayon du cercle osculateur; en outre, considérant x, y, z comme les fonctions d'un paramètre variable t , il est bien connu que le cercle osculateur de la courbe au point x, y, z est déterminé par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2, \\
 (2) \quad & \left\{ \begin{aligned} & a(x - \alpha) + q(y - \beta) + c(z - \gamma) = 0, \\ & a'(x - \alpha) + b'(y - \beta) + c'(z - \gamma) = -\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \\ & (bc' - b'c)(x - \alpha) + (ca' - c'a)(y - \beta) \\ & \quad + (ab' - a'b)(z - \gamma) = 0, \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

en posant, pour abrégér,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b, \quad \frac{dz}{dt} = c, \\ & \frac{d^2x}{dt^2} = a', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = b', \quad \frac{d^2z}{dt^2} = c'. \end{aligned} \right.$$

On sait que la résolution du problème en question dépend essentiellement de la résolution des équations (2), linéaires en $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$. C'est la résolution du système mentionné à laquelle je prends la liberté de vouer ces lignes.

En tirant la valeur de $x - \alpha$ des équations (2), on trouve, par la voie du calcul des déterminants, que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ bc' - b'c & ca' - c'a & ab' - a'b \end{vmatrix} (x - \alpha) \\ = - \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \begin{vmatrix} ca' - c'a & ab' - a'b \\ b & c \end{vmatrix}.$$

Pour transformer la valeur de $x - \alpha$ exprimée par cette équation, multiplions cette équation par la suivante :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}.$$

Le résultat de la multiplication sera

$$\begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & aa' + bb' + cc' & a \\ aa' + bb' + cc' & a'^2 + b'^2 + c'^2 & a' \\ 0 & 0 & bc' - b'c \end{vmatrix} (x - \alpha) \\ = - \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \begin{vmatrix} -a(bc' - b'c) & -a'(bc' - b'c) \\ \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 - a^2 & \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} - aa' \end{vmatrix}.$$

En chassant le facteur commun $(bc' - b'c)$ dans cette équation et en remarquant que, d'après les notations (3), on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2, \\ aa' + bb' + cc' = \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2},$$

en outre que le déterminant à droite, abstraction faite du facteur $bc' - b'c$, se laisse transformer dans le suivant

$$\begin{vmatrix} -a & -a' \\ \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 & \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \end{vmatrix},$$

on aura, pour la détermination de la valeur de $x - \alpha$,

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 & \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \\ \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} & a'^2 + b'^2 + c'^2 \end{vmatrix} (x - \alpha) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \begin{vmatrix} a & a' \\ \frac{ds}{dt} & \frac{d^2s}{dt^2} \end{vmatrix},$$

d'où l'on tire facilement la valeur de $x - \alpha$. On obtient les valeurs de $y - \beta$, $z - \gamma$ par une voie analogue, et enfin la valeur de r par l'équation (1).