

H. RESAL

Sur la détermination de quelques intégrales indéfinies

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 529-537

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20_529_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20_529_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA DÉTERMINATION DE QUELQUES INTÉGRALES INDÉFINIES;

PAR M. H. RESAL.

1. La racine carrée d'un trinôme du second degré peut toujours se mettre sous l'une des trois formes suivantes :

$$\sqrt{1+x^2}, \quad \sqrt{1-x^2}, \quad \sqrt{x^2-1}.$$

Cela posé, désignons par $f(x)$ une fonction quelconque de x .

2. Soient

$$X = \int f(x) \sqrt{1+x^2} \, dx, \quad X_1 = \int \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \, dx.$$

On a, en ayant recours à la méthode d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} X &= \int \frac{f(x) \, dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x^2 f(x) \, dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= X_1 + \frac{1}{2} \int \frac{x f(x) \, dx^2}{\sqrt{1+x^2}} = X_1 + \int x f(x) \, d\sqrt{1+x^2}, \\ &= X_1 + x f(x) \sqrt{1+x^2} - \int [f(x) + x f'(x)] \sqrt{1+x^2} \, dx; \end{aligned}$$

d'où

$$(1) \quad 2X = X_1 + x f(x) \sqrt{1+x^2} - \int x f'(x) \sqrt{1+x^2} \, dx.$$

Si nous posons

$$(2) \quad x f'(x) = \varphi'(x),$$

cette équation donne, en intégrant encore une fois par parties,

$$(3) \quad 2X = X_1 + [x f(x) - \varphi(x)] \sqrt{1+x^2} + \int \frac{x \varphi(x) \, dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On voit ainsi que X dépend de l'intégrale X_1 , et d'une seconde intégrale de même nature que la précédente.

Exemples :

1° $f(x) = 1$. L'équation (1) donne (1)

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + x \sqrt{1+x^2} \\ &= \log [x + \sqrt{1+x^2}] + x \sqrt{1+x^2}. \end{aligned} \right.$$

Cette méthode est plus expéditive que celles auxquelles on a généralement recours, puisqu'elle ne fait dépendre l'intégrale X que d'une autre dont on trouve facilement l'expression.

2° $f(x) = x$, pour mémoire, car on voit immédiatement que

$$(5) \quad 2 \int x \sqrt{1+x^2} dx = \frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}.$$

3° $f(x) = \frac{1}{x}$. De l'équation (1) on déduit

$$(2) \quad \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2}.$$

En posant

$$\sqrt{1+x^2} = u,$$

(1) En posant $x = \tan \theta$, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{d\theta}{\cos \theta} = 2 \int \frac{\frac{d\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \int \frac{x \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \log \frac{1 + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \frac{\theta}{2}} = \log \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \log \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \log (\sqrt{1+x^2} + x). \end{aligned}$$

on trouve successivement

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2\sqrt{1+x^2}} \\ &= \int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2} \log \frac{u-1}{u+1} = \log \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right.$$

4° $f(x) = x^m$, en désignant par m un nombre quelconque.

On a, d'après la formule (1),

$$\begin{aligned} 2 \int x^m \sqrt{1+x^2} dx &= \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &\quad + x^{m+1} \sqrt{1+x^2} - m \int x^m \sqrt{1+x^2} dx, \end{aligned}$$

d'où

$$(9) \quad (2+m) \int x^m \sqrt{1+x^2} dx = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+x^2}} + x^{m+1} \sqrt{1+x^2}.$$

Mais on a

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{x^{m-1} dx^2}{\sqrt{1+x^2}} = \int x^{m-1} d\sqrt{1+x^2},$$

d'où, en intégrant par parties,

$$(7) \quad \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+x^2}} = x^{m-1} \sqrt{1+x^2} - (m-1) \int x^{m-2} \sqrt{1+x^2} dx.$$

L'équation (9) devient aussi

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} (2+m) \int x^m \sqrt{1+x^2} dx \\ = x^{m-1} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (m-1) \int x^{m-2} \sqrt{1+x^2} dx. \end{aligned} \right.$$

Supposons que m soit un nombre pair positif; on voit, d'après cette formule, que l'on fera dépendre

$$\begin{array}{lcl} \int x^m \sqrt{1+x^2} dx & \text{de} & \int x^{m-2} \sqrt{1+x^2} dx, \\ \int x^{m-2} \sqrt{1+x^2} dx & \text{de} & \int x^{m-4} \sqrt{1+x^2} dx, \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots, \\ \int x^2 \sqrt{1+x^2} dx & \text{de} & \int \sqrt{1+x^2} dx. \end{array}$$

Or, comme nous savons déterminer la dernière de ces intégrales, on trouvera sans difficulté l'expression de la première.

Si m est positif et impair, on voit, en opérant comme ci-dessus, que l'intégrale du premier membre de l'équation (8) ne dépendra finalement que de la suivante

$$\int x \sqrt{1+x^2} dx,$$

dont l'expression est connue.

Supposons maintenant que m soit un nombre entier négatif et posons $m-2=-n$; la formule (8) donne

$$\begin{aligned} (n-1) \int x^{-n} \sqrt{1+x^2} dx \\ = -x^{-n+1} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + (4-n) \int x^{(n-2)} \sqrt{1+x^2} dx; \end{aligned}$$

et l'on voit que, selon que n sera pair ou impair, on sera conduit finalement à

$$\int \sqrt{1+x^2} dx \quad \text{ou} \quad \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx,$$

intégrales que nous savons déterminer.

D'après ce qui précède, on voit que, si m est un nombre entier positif ou négatif, l'intégrale du premier membre de l'équation (7) s'obtiendra sans difficulté.

3. Soient

$$X = \int f(x) \sqrt{1-x^2} dx, \quad X_1 = \int \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

On a

$$\begin{aligned} X &= \int \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int x^2 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = X_1 + \int x f(x) d\sqrt{1-x^2} \\ &= X_1 + x f(x) \sqrt{1-x^2} - \int [f(x) + x f'(x)] dx; \end{aligned}$$

d'où

$$(9) \quad 2X = X_1 + x f(x) \sqrt{1-x^2} - \int x f'(x) \sqrt{1-x^2} dx,$$

équation identique à l'équation (1), à la condition de remplacer, sous le radical, dans cette dernière, $+x^2$ par $-x^2$.

Exemples :

1^o $f(x) = 1$. La formule (9) donne

$$(10) \quad 2 \int \sqrt{1-x^2} dx = \arcsin x + x \sqrt{1-x^2}.$$

2^o $f(x) = x$ (pour mémoire). On a

$$(11) \quad 2 \int x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$

3^o $f(x) = \frac{1}{x}$. On a, d'après la formule (9),

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx = \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}.$$

Si nous posons

$$\sqrt{1-x^2} = u,$$

nous aurons

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \\ &= -\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \log \frac{(1-u)}{1+u} = \log \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right.$$

par suite

$$(13) \quad \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx = \log \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{1-x^2}.$$

4^o $f(x) = x^m$. Lorsque m est un nombre entier positif et négatif, le mode de réduction des intégrales indiqué à la fin du numéro précédent est applicable ici, et nous n'avons pas à insister sur ce point.

4. Soit

$$X = \int f(x) \sqrt{x^2 - 1} dx, \quad X_1 = \int \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} X &= - \int \frac{f(x) dx}{\sqrt{x^2 - 1}} + \int \frac{x^2 f(x) dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = -X_1 + \int x f(x) d\sqrt{x^2 - 1} \\ &= -X_1 + x f(x) \sqrt{x^2 - 1} - \int [f(x) + x f'(x)] \sqrt{x^2 - 1} dx; \end{aligned}$$

d'où

$$(13) \quad 2X = -X_1 + x f(x) \sqrt{x^2 - 1} - \int x f(x) \sqrt{x^2 - 1} dx.$$

Exemples :

1° $f(x) = 1$. L'équation (13) donne

$$(14) \quad \begin{cases} 2 \int \sqrt{x^2 - 1} dx = - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ + x \sqrt{x^2 - 1} = - \log(x - \sqrt{x^2 - 1}) + x \sqrt{x^2 - 1}. \end{cases}$$

2° $f(x) = x$ (pour mémoire). On a

$$(15) \quad 2 \int x \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^2 - 1}, \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

3° $f(x) = \frac{1}{x}$. La formule (13) donne

$$2 \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = - \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x^2 - 1} + \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx;$$

(1) En posant $x = \frac{1}{\sin \theta}$, on a

$$\begin{aligned} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} &= \int \frac{dx}{\sin \theta} = \int \frac{d\frac{\theta}{2}}{\frac{\cos^2 \theta}{\tan \frac{\theta}{2}}} \\ &= \log \tan \frac{\theta}{2} = \log \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} = \log(x - \sqrt{x^2 - 1}). \end{aligned}$$

d'où

$$(7) \quad \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = - \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1}.$$

En posant $x = \frac{1}{\sin \theta}$, on reconnaît facilement que l'intégrale du second membre de cette équation, prise avec son signe, a pour valeur θ . On a donc

$$(16) \quad \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \arcsin \frac{1}{x} + \sqrt{x^2-1}.$$

4° L'intégrale

$$\int x^m \sqrt{x^2-1} dx,$$

dans laquelle m est un nombre entier positif ou négatif, se réduira en suivant la marche indiquée à la fin du n° 2.

5. Nous allons maintenant chercher à exprimer, au moyen de transcendentes connues, les intégrales des racines carrées des fonctions trigonométriques. Il est évident que, dans tous les cas, on est ramené à considérer les trois intégrales suivantes :

$$\int \sqrt{\sin x} dx, \quad \int \sqrt{\frac{1}{\sin x}} dx, \quad \int \sqrt{\tan x} dx,$$

les deux premières supposant des limites comprises entre zéro et π , et la troisième entre zéro et $\frac{\pi}{2}$.

6. Si nous posons $\sin x = \cos^2 \theta$, nous avons

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\sin x} dx &= -2 \int \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{\sqrt{1-\cos^4 \theta}} = -2 \int \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{1+\cos^2 \theta}} \\ &= 2 \left(- \int \sqrt{1+\cos^2 \theta} d\theta + \int \frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos^2 \theta}} \right), \end{aligned}$$

et enfin

$$(17) \quad \int \sqrt{\sin x} dx = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 \theta}} - \sqrt{2} \int \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 \theta} d\theta \right).$$

On est ainsi ramené à deux intégrales elliptiques qui

sont respectivement de la première et de la seconde espèce.

7. En continuant à poser $\sin x = \cos^2 \theta$, nous avons

$$\int \sqrt{\frac{1}{\sin x}} dx = -2 \int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{1 - \cos^4 \theta}} = -2 \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}},$$

ou

$$(18) \quad \int \sqrt{\frac{1}{\sin x}} dx = -\sqrt{2} \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}},$$

ce qui est une intégrale elliptique de la première espèce.

En retranchant l'une de l'autre les équations (17) et (18), on trouve

$$(19) \quad \int \frac{1 - \sin x}{\sqrt{\sin x}} dx = 2^{\frac{1}{2}} \int \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta} d\theta.$$

8. Considérons maintenant l'intégrale

$$X = \int \sqrt{\tan x} dx.$$

En posant

$$\tan x = \tan^2 \theta,$$

on trouve facilement

$$\begin{aligned} X &= 2 \int \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta} = 2 \int \frac{\sin^2 \theta d\theta}{1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \int \frac{\sin^2 \theta d\theta}{1 - \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta} + \int \frac{\sin^2 \theta d\theta}{1 + \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\theta}{1 - \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta} + \frac{1}{2} \int \frac{d\theta}{1 + \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{\cos 2\theta d\theta}{1 - \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{2} \int \frac{\cos 2\theta d\theta}{1 + \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d \tan \theta}{\left(\tan \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{d \tan \theta}{\left(\tan \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \log \frac{1 - \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

et enfin

$$(20) \quad \int \sqrt{\tan x} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2} \tan \theta - 1) \right. \\ \left. + \arctan(\sqrt{2} \tan \theta + 1) \right. \\ \left. + \log \left(\frac{\sqrt{2} - \sin 2\theta}{\sqrt{2} + \sin 2\theta} \right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right].$$