

MAURICE D'OCAGNE

**Sur le mouvement vertical d'un point
pesant dans un milieu résistant**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 506-511

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__506_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LE MOUVEMENT VERTICAL D'UN POINT PESANT
DANS UN MILIEU RÉSISTANT ;**

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève de l'École Polytechnique.

1. On sait que la loi du mouvement vertical d'un point pesant dans un milieu résistant est différente selon que le mouvement est descendant ou ascendant.

Cette Note a pour but de faire connaître une propriété commune à ces deux mouvements. Cette propriété n'est autre que l'expression de la loi qui lie les espaces parcourus par le mobile dans des temps égaux.

Nous supposons la résistance du milieu ambiant proportionnelle au carré de la vitesse.

2. Mouvement descendant. — Considérons les espaces successifs parcourus par le mobile pendant des intervalles de temps égaux τ . Soient α_{n-1} et α_n deux de ces espaces consécutifs. En appelant g l'intensité de la pesanteur dans le vide, K la constante de résistance du milieu considéré, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La somme $e^{-\frac{g^2 \alpha_{n-1}}{K}} + e^{\frac{g^2 \alpha_n}{K}}$ est constante et indépendante de la vitesse initiale du mobile.*

En appelant v_0 la vitesse initiale du mobile, on sait que la loi du mouvement descendant est donnée par la formule

$$z = \frac{K^2}{g^2} \log \frac{e^{\frac{g^2}{K}(K + v_0)} + e^{-\frac{g^2}{K}(K - v_0)}}{2K},$$

que nous pourrions écrire

$$2K e^{\frac{g^2}{K}} = e^{\frac{g^2}{K}(K + v_0)} + e^{-\frac{g^2}{K}(K - v_0)}.$$

Nous poserons, pour simplifier l'écriture, $e^{\frac{g^2}{K}} = \varepsilon$, et cette formule deviendra

$$(1) \quad 2K \varepsilon^{\frac{z}{K}} = \varepsilon^t (K + v_0) + \varepsilon^{-t} (K - v_0).$$

Si z et t sont pris pour représenter l'espace et le temps correspondant au point de séparation des segments α_{n-1} et α_n , nous avons, par application de la for-

membre (1),

$$2K\varepsilon^{\frac{z-\alpha_{n-1}}{h}} = \varepsilon^{\ell-\tau}(K + v_0) + \varepsilon^{-(\ell-\tau)}(K - v_0)$$

et

$$2K\varepsilon^{\frac{z+\alpha_n}{h}} = \varepsilon^{\ell+\tau}(K + v_0) + \varepsilon^{-(\ell+\tau)}(K - v_0).$$

Additionnons ces deux dernières égalités membre à membre; il nous vient

$$2K\left(\varepsilon^{\frac{z-\alpha_{n-1}}{h}} + \varepsilon^{\frac{z+\alpha_n}{h}}\right) = \varepsilon^{\ell}(\varepsilon^{-\tau} + \varepsilon^{\tau})(K + v_0) + \varepsilon^{-\ell}(\varepsilon^{\tau} + \varepsilon^{-\tau})(K - v_0)$$

ou

$$2K\left(\varepsilon^{\frac{z-\alpha_{n-1}}{h}} + \varepsilon^{\frac{z+\alpha_n}{h}}\right) = [\varepsilon^{\ell}(K + v_0) + \varepsilon^{-\ell}(K - v_0)](\varepsilon^{\tau} + \varepsilon^{-\tau}).$$

Divisant cette égalité par l'égalité (1), membre à membre, nous avons

$$\frac{\varepsilon^{\frac{z-\alpha_{n-1}}{h}} + \varepsilon^{\frac{z+\alpha_n}{h}}}{\varepsilon^{\frac{z}{h}}} = \varepsilon^{\tau} + \varepsilon^{-\tau},$$

ou

$$\varepsilon^{-\frac{\alpha_{n-1}}{h}} + \varepsilon^{\frac{\alpha_n}{h}} = \varepsilon^{\tau} + \varepsilon^{-\tau},$$

ou encore

$$e^{-\frac{g\alpha_{n-1}}{h^2}} + e^{\frac{g\alpha_n}{h^2}} = e^{\frac{g\tau}{h}} + e^{-\frac{g\tau}{h}}.$$

La valeur du second membre, ne dépendant que de quantités fixes, est constante. De plus, la valeur de cette constante est indépendante de la vitesse initiale v_0 . Le théorème est, par suite, démontré.

Remarque. — En appelant α l'espace parcouru, au bout du temps τ , par le mobile, à partir de sa position initiale, lorsqu'on le laisse tomber sans lui imprimer de vitesse, on a

$$e^{\frac{g\tau}{h}} + e^{-\frac{g\tau}{h}} = 2e^{\frac{g\alpha}{h^2}}.$$

On a ainsi une nouvelle expression de la constante

3. *Mouvement ascendant.* — En conservant aux diverses lettres la même signification que dans le numéro précédent, on a encore :

THÉORÈME. — *La somme $e^{-\frac{g\alpha_{n-1}}{K^2}} + e^{\frac{g\alpha_n}{K^2}}$ est constante et indépendante de la vitesse initiale du mobile.*

On sait que la loi du mouvement ascendant est donnée par la formule

$$z = \frac{K^2}{g} \log \frac{v_0 \sin \frac{gt}{K} + K \cos \frac{gt}{K}}{K},$$

que nous pouvons écrire

$$(2) \quad K e^{\frac{gz}{K^2}} = v_0 \sin \frac{gt}{K} + K \cos \frac{gt}{K}.$$

Si z et t sont pris pour représenter l'espace et le temps correspondant au point de séparation des segments α_{n-1} et α_n , parcourus consécutivement par le mobile dans le temps τ , nous avons, d'après la formule (2),

$$K e^{\frac{g(z-\alpha_{n-1})}{K^2}} = v_0 \sin \frac{g}{K}(t-\tau) + K \cos \frac{g}{K}(t-\tau),$$

et

$$K e^{\frac{g(z+\alpha_n)}{K^2}} = v_0 \sin \frac{g}{K}(t+\tau) + K \cos \frac{g}{K}(t+\tau).$$

Additionnant ces deux égalités membre à membre, nous avons

$$\begin{aligned} K \left(e^{\frac{g(z-\alpha_{n-1})}{K^2}} + e^{\frac{g(z+\alpha_n)}{K^2}} \right) &= 2 v_0 \sin \frac{gt}{K} \cos \frac{g\tau}{K} + 2 K \cos \frac{gt}{K} \cos \frac{g\tau}{K} \\ &= 2 \cos \frac{g\tau}{K} \left(v_0 \sin \frac{gt}{K} + K \cos \frac{gt}{K} \right). \end{aligned}$$

Divisons cette dernière égalité par l'égalité (2) membre

à membre, il nous vient

$$\frac{e^{-\frac{g^{a_{n-1}}}{k^2}} + e^{-\frac{g^{a_n}}{k^2}}}{e^{-\frac{g^2}{k^2}}} = 2 \cos \frac{g\tau}{k}$$

ou

$$e^{-\frac{g^{a_{n-1}}}{k^2}} + e^{-\frac{g^{a_n}}{k^2}} = 2 \cos \frac{g\tau}{k}.$$

La valeur du second membre, ne dépendant que de quantités fixes, est constante. De plus, la valeur de cette constante est indépendante de la vitesse initiale v_0 . Le théorème est donc démontré.

Nous mettrons cette constante sous une forme qui se rapprochera plus de celle que nous avons obtenue, dans le cas du mouvement descendant, en remarquant que

$$2 \cos \frac{g\tau}{k} = e^{\frac{g\tau}{k}\sqrt{-1}} + e^{-\frac{g\tau}{k}\sqrt{-1}}.$$

4. *Résumé.* — En définitive, lorsqu'un point pesant se meut verticalement dans un milieu résistant, dans un sens ou dans l'autre, on a

$$e^{-\frac{g^{a_{n-1}}}{k^2}} + e^{-\frac{g^{a_n}}{k^2}} = C,$$

la constante C étant indépendante de v_0 .

Posant, d'une manière générale,

$$e^{-\frac{g^{a_i}}{k^2}} = E_i,$$

nous écrirons la formule précédente

$$\frac{1}{E_{n-1}} + E_n = C.$$

Nous avons donc

$$\frac{1}{E_1} + E_2 = C.$$

d'où

$$E_2 = C - \frac{1}{E_1}.$$

De même,

$$E_3 = C - \frac{1}{E_2} = C - \frac{1}{C - \frac{1}{E_1}},$$

et encore

$$E_4 = C - \frac{1}{C - \frac{1}{C - \frac{1}{E_1}}}.$$

Nous voyons ainsi comment sont liés E_n et E_1 , et par suite α_n et α_1 .