

G. CANDÈZE

Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 49-53

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__49_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES D'UNE ÉQUATION;

PAR M. G. CANDÈZE,

Élève de l'École Polytechnique.

1. La règle de Maclaurin, ou mieux encore celle de Lagrange, donne immédiatement une limite qui ne dépend que du coefficient de la plus haute puissance de x , du rang du premier terme négatif et de la valeur absolue du plus grand coefficient négatif, mais nullement de la place de ce dernier; il est évident cependant que son rang doit avoir une importance souvent fort grande : par exemple, la plus grande racine de l'équation

$$x^5 - 100x^4 - 1 = 0$$

est supérieure à 100, tandis que la plus grande racine de l'équation

$$x^5 - x^4 - 100 = 0$$

est inférieure à 3, bien que la règle de Maclaurin donne la même limite pour les deux équations.

Je me propose de donner une limite qui fasse intervenir le rang du terme négatif dont le coefficient est le plus grand en valeur absolue.

Considérons une équation telle que le coefficient de la plus haute puissance de x soit le plus grand en valeur absolue; une telle équation admet 2 comme limite supérieure des racines. En effet, soit A_0 le coefficient considéré; si le polynôme

$$(1) \quad A_0 x^m - A_0 x^{m-1} - \dots - A_0$$

est positif pour une certaine valeur de x , le polynôme

proposé

$$(2) \quad A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m$$

le sera certainement. Or 2 est une limite supérieure pour le polynôme (1) : donc 2 est aussi une limite supérieure pour le polynôme (2).

Remarquons d'ailleurs qu'on peut obtenir une limite plus petite que 2 en appliquant, par exemple, la méthode de Maclaurin, ou telle autre que l'on voudra.

Cela posé, considérons une équation entière quelconque; formons l'équation qui admet pour racines les racines de la première, divisées par p . Si l'équation proposée est

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m = 0,$$

la transformée sera

$$p^m A_0 x^m + p^{m-1} A_1 x^{m-1} + \dots + A_m = 0,$$

et l'on peut toujours choisir p de telle sorte que le coefficient $A_0 p^m$ soit le plus grand en valeur absolue. Pour cela, on comparera tous les termes au premier, et l'on verra quelles sont les valeurs à donner à p pour que $A_0 p^m$ soit plus grand que chacun d'eux : la plus grande valeur de p sera une valeur cherchée.

Si nous formons les coefficients successifs, nous pourrions appliquer une des règles connues; mais, si nous voulons opérer plus rapidement, nous pourrions prendre 2 comme limite supérieure : alors une limite pour l'équation proposée sera certainement $2p$, ou plus généralement, si nous avons trouvé l comme limite de la transformée, une limite supérieure de la proposée sera certainement lp .

Cette limite est, en général, beaucoup plus avantageuse que la limite de Maclaurin ou de Lagrange, à moins que le plus grand coefficient négatif ne soit le premier des coef-

ficients négatifs ; dans ce cas, il est préférable d'appliquer une autre méthode.

Considérons, par exemple, l'équation

$$x^8 + 2x^7 - 2x^6 + 6x^5 - 80x^4 \\ + 100x^3 - 400x^2 + 15x + 30 = 0 ;$$

la règle de Lagrange donne

$$1 + \sqrt[4]{400} = 31.$$

Formons la transformée : pour $p=3$, on voit facilement que le premier coefficient est le plus grand ; donc 6 est une limite supérieure des racines. Si nous voulions calculer les coefficients, on pourrait, en appliquant à la transformée une des méthodes connues, trouver une limite inférieure à 2, par suite pour la proposée une limite inférieure à 6, mais le calcul serait alors plus long.

2. On peut encore employer un procédé du même genre pour rendre la méthode de Maclaurin plus avantageuse. Changeons x en py et déterminons p de façon que le plus grand des coefficients négatifs soit le plus grand des coefficients de même signe ; en appliquant à l'équation transformée la méthode de Maclaurin ou celle de Lagrange, on obtiendra une limite qui, multipliée par p , donnera une limite de la proposée.

Il est plus avantageux d'opérer ainsi lorsqu'on ne veut pas se contenter de 2 comme limite dans la méthode précédente et qu'on veut appliquer à la transformée une des méthodes connues.

3. On peut, en appliquant toujours ce mode de transformation de x en py , trouver d'autres limites plus ou moins avantageuses, suivant les cas, mais plus compliquées. Par exemple, on pourrait encore, en remarquant

qu'une équation qui a q termes négatifs admet 1 comme limite supérieure lorsque le premier terme est au moins égal à la somme des coefficients négatifs (*a fortiori* à q fois le plus grand terme négatif), rendre le premier coefficient plus grand que la somme des coefficients négatifs ou que q fois le plus grand dans l'équation transformée; si pour cela il faut changer x en $p\gamma$, p est une limite supérieure. Si nous appliquons cette méthode à l'exemple précité, on voit que 3 est une limite supérieure.

4. On peut à la fois tenir compte du rang du plus grand coefficient négatif et du nombre des termes négatifs de la façon suivante :

Considérons une équation

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots = 0.$$

Multiplions par p le premier membre de l'équation, p étant le nombre des termes négatifs; ce premier membre est la somme des termes positifs diminués du premier, plus le premier diminué de la somme des termes négatifs. Si nous rendons cette dernière partie positive en substituant un nombre a , ce nombre a sera une limite supérieure pour le polynôme proposé. Or le premier terme est maintenant $pA_0 x^m$, et la partie du polynôme que nous voulons rendre positive peut être considérée comme la somme des premiers membres de p équations binômes dont le premier terme serait $A_0 x^m$ et le second terme un des termes négatifs du polynôme multiplié par p . La plus grande des racines de ces équations sera une limite pour le polynôme.

Pour avoir cette limite, on opérera donc de la façon suivante. On considérera un terme négatif du polynôme, soit

— $A_q x^{m-q}$; $\sqrt[q]{\frac{A_q}{A_0}}$ sera la racine d'une des équations binômes dont nous venons de parler; la plus grande valeur que prendra cette quantité, lorsque l'on considérera successivement tous les termes négatifs, sera une limite pour le polynôme.
