

CH. BIEHLER

Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20 (1881), p. 489-498

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20_489_1>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20_489_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**THÉORIE DES POINTS SINGULIERS DANS LES COURBES
ALGÈBRIQUES (¹);**

PAR M. CH. BIEHLER.

TROISIÈME PARTIE.

1. Cette troisième Partie a pour objet la construction des branches paraboliques fournies par une direction multiple de points à l'infini.

(¹) Voir même Tome, p. 97.

Nous considérerons d'abord le cas où la direction donnée est celle de l'axe des y .

I.

Soit toujours

$$(1) \begin{cases} F(x, y) = f_m(x, y) \\ \quad + f_{m-1}(x, y) + \dots + f_1(x, y) + f_0 = 0 \end{cases}$$

l'équation de la courbe, dans laquelle les groupes homogènes ont été mis en évidence et leur degré marqué par l'indice de f .

Coupons la courbe par la droite $x = \frac{1}{\lambda}$, et formons le faisceau des droites qui joignent l'origine aux points d'intersection de la droite et de la courbe. Il suffit, pour cela, d'éliminer z entre les équations

$$f_m(x, y) + z f_{m-1}(x, y) + z^2 f_{m-2}(x, y) + \dots + z^m f_0 = 0, \\ x = \frac{z}{\lambda}.$$

On obtient ainsi pour l'équation du faisceau

$$(2) \begin{cases} f_m(x, y) + \lambda x f_{m-1}(x, y) \\ \quad + \lambda^2 x^2 f_{m-2}(x, y) + \dots + \lambda^m x^m f_0 = 0. \end{cases}$$

Soit t l'inverse du coefficient angulaire de l'un quelconque des rayons du faisceau, on aura

$$x = ty.$$

Remplaçant, dans (2), x par cette valeur et divisant les deux membres par y^m , il viendra

$$(3) \begin{cases} f_m(t, 1) + \lambda t f_{m-1}(t, 1) \\ \quad + \lambda^2 t^2 f_{m-2}(t, 1) + \dots + \lambda^m t^m f_0 = 0, \end{cases}$$

ou, en posant d'une manière générale $f_\mu(t, 1) = \varphi_\mu(t)$,

(491)

l'équation (3) prendra la forme

$$(4) \quad \varphi_m(t) + \lambda t \varphi_{m-1}(t) + \lambda^2 t^2 \varphi_{m-2}(t) + \dots + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0.$$

2. Lorsque la droite $x = \frac{1}{\lambda}$ s'éloignera indéfiniment de l'origine, c'est-à-dire lorsque λ tendra vers zéro, une ou plusieurs valeurs de t devront tendre vers zéro, s'il existe des branches paraboliques dans la direction de l'axe des y .

Or, l'équation (4) développée devient

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi_m(0) + t \varphi'_m(0) + \frac{t^2}{1.2} \varphi''_m(0) + \dots + \frac{t^m}{m!} \varphi^{(m)}_m(0) \\ & + \lambda t \left[\varphi_{m-1}(0) + t \varphi'_{m-1}(0) + \dots + \frac{t^{m-1}}{m-1!} \varphi^{(m-1)}_{m-1}(0) \right] + \dots \\ & + \lambda^{m-1} t^{m-1} [\varphi_1(0) + t \varphi'_1(0)] + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

Il faut donc que $\varphi_m(0) = 0$ et $\varphi'_m(0) = 0$, pour que l'équation (5) puisse être satisfaite pour un système de valeurs infiniment petites de λ et de t , c'est-à-dire que la direction de l'axe des y soit une direction double de points à l'infini, ce qui est bien connu. L'équation (5), dans cette hypothèse, devient, après avoir été débarrassée du facteur t ,

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{t}{1.2} \varphi''_m(0) + \dots + \frac{t^{m-1}}{m!} \varphi^{(m)}_m(0) \\ & + \lambda [\varphi_{m-1}(0) + t \varphi'_{m-1}(0) + \dots] + \dots \\ & + \lambda^{m-1} t^{m-2} [\varphi_1(0) + t \varphi'_1(0)] + \lambda^m t^{m-1} \varphi_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$(7) \quad t \left[\frac{1}{1.2} \varphi''_m(0) + \alpha \right] + \lambda [\varphi_{m-1}(0) + \beta] = 0;$$

on en tire

$$t = - \frac{\varphi_{m-1}(0) + \beta}{\frac{1}{1.2} \varphi''_m(0) + \alpha} \times \lambda;$$

α et β sont des sommes de termes qui renferment tous soit t , soit λ en facteur.

Quand λ tend vers zéro, une seule racine t de l'équation (6) tendra vers zéro, et la formule

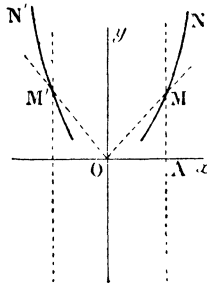
$$(8) \quad t = - \frac{\varphi_{m-1}(0)}{\frac{1}{1.2} \varphi_m''(0)} \times \lambda$$

en donne une valeur approchée, en supposant que $\varphi_m'(0)$ et $\varphi_{m-1}(0)$ soient différents de zéro.

L'interprétation géométrique de ces résultats est très simple.

Soit OA (fig. 1) la quantité $\frac{1}{\lambda}$; à mesure que λ diminue, la droite AM parallèle à l'axe des y s'éloigne de

Fig. 1.



l'origine; sur cette droite se trouve un point M de la courbe qui est donné par l'intersection de AM avec un rayon OM très voisin de Oy; ce rayon a pour coefficient angulaire l'inverse de la racine infiniment petite représentée par la formule (8). Quand λ diminue, le point M engendre la branche MN, et la région dans laquelle se trouve cette branche est donnée par le signe du rapport $\frac{\varphi_{m-1}(0)}{\varphi_m''(0)}$. Lorsque λ change de signe, la racine infi-

niment petite change aussi de signe et donne la branche $M'N'$ située de l'autre côté de l'axe de y . La figure est construite dans l'hypothèse où le coefficient de λ dans la formule (8) est positif.

Supposons maintenant que $\varphi_{m-1}(0)$ soit toujours différent de zéro et qu'un certain nombre de dérivées de la fonction $\varphi_m(t)$ soient nulles pour $t = 0$; soient

$$\varphi_m''(0) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_m^{(q-1)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_m^{(q)}(0) \gtrless 0.$$

L'équation (6) prendra la forme

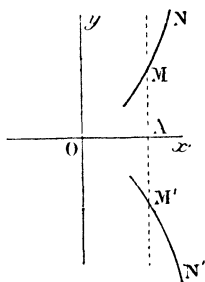
$$(9) \quad t^{q-1} \left[\frac{\varphi_m^{(q)}(0)}{q!} + \alpha \right] + \lambda [\varphi_{m-1}(0) + \beta] = 0,$$

α et β renfermant dans tous leurs termes soit t , soit λ en facteur.

Si $q - 1$ est impair, une seule des $q - 1$ racines infiniment petites de l'équation (9) qui tend vers zéro engendre une courbe dont la forme générale est analogue à celle de la *fig. 1*.

Si $q - 1$ est pair, deux des racines de l'équation (9) sont réelles; elles sont de signes contraires, mais il faut

Fig. 2.



pour cela que λ ait reçu une valeur dont le signe soit celui du rapport $-\frac{\varphi_{m-1}(0)}{\varphi_m^{(q)}(0)}$; dans ce cas, la courbe affecte une forme semblable à celle de la *fig. 2*.

3. Supposons maintenant que $\varphi_{m-1}(0) = 0$.

L'équation (6) ne sera satisfaite pour de petites valeurs de λ et de t qu'autant que $\varphi_m(0) = 0$, $\varphi'_m(0) = 0$, $\varphi''_m(0) = 0$; c'est-à-dire que la direction de l'axe des y doit être triple.

Dans ce cas, l'équation (6) prend la forme

$$t \left[\frac{1}{1.2.3} \varphi'''_m(0) + \alpha \right] + \lambda [\varphi'_{m-1}(0) + \beta] = 0,$$

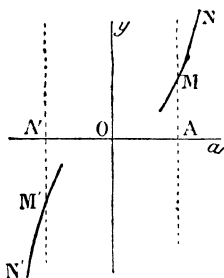
et l'on obtient encore des branches paraboliques analogues à celles de la *fig. 1*.

Mais si $\varphi_{m-1}(0) = 0$ avec $\varphi'_{m-1}(0) = 0$, et si $\varphi''_{m-1}(0)$ est aussi nul, l'équation pourra s'écrire

$$(10) \quad t \left[\frac{1}{1.2.3} \varphi'''_m(0) + \alpha \right] + \lambda^2 [\varphi_{m-2}(0) + \beta] = 0,$$

et la racine infiniment petite t engendre les branches MN, MN' (*fig. 3*), situées de part et d'autre de l'axe des y et dans des régions opposées du plan; la *fig. 3* a été con-

Fig. 3.



struite dans l'hypothèse où le rapport $\frac{\varphi_{m-2}(0)}{\varphi'''_m(0)}$ est négatif.

4. Considérons maintenant le cas où l'on a

$$\begin{aligned} \varphi_m(0) = 0, \quad \varphi'_m(0) = 0, \quad \varphi''_m(0) = 0, \\ \varphi'''_m(0) = 0, \quad \varphi^{iv}_m(0) \geq 0, \\ \varphi_{m-1}(0) = 0, \quad \varphi'_{m-1}(0) = 0, \quad \varphi''_{m-1}(0) \geq 0 \text{ avec } \varphi_{m-2}(0) \geq 0; \end{aligned}$$

l'équation (6) deviendra

$$(11) \quad t^2 \frac{\varphi^{iv}_m(0)}{4!} + \lambda t \frac{\varphi''_{m-1}(0)}{1.2} + \lambda^2 \varphi_{m-2}(0) + \gamma = 0,$$

γ étant une somme de termes qui sont tous infiniment petits devant les trois premiers.

Si l'on pose $t = \tau \times \lambda$, l'équation (11) aura tous ses termes divisibles par λ^2 et pourra s'écrire

$$(12) \quad \tau^2 \frac{\varphi^{iv}_m(0)}{4!} + \tau \frac{\varphi''_{m-1}(0)}{1.2} + \varphi_{m-2}(0) + \gamma' = 0,$$

γ' étant une somme de termes qui renferment tous λ en facteur.

Quand λ est très petit, la fonction τ a une valeur aussi voisine que l'on veut de la valeur de l'une des racines de l'équation du second degré

$$(13) \quad \tau^2 \frac{\varphi^{iv}_m(0)}{4!} + \tau \frac{\varphi''_{m-1}(0)}{1.2} + \varphi_{m-2}(0) = 0.$$

Soient τ_0 et τ_1 les racines de l'équation (13).

Si τ_0 et τ_1 sont réelles et inégales, les valeurs des deux racines de l'équation (11) qui tendent vers zéro sont

$$t = \tau_0 \times \lambda, \quad t = \tau_1 \times \lambda.$$

Si τ_0 et τ_1 sont de même signe, on obtient une disposition des branches analogues à celle que présente la *fig. 4*.

Si τ_0 et τ_1 sont de signes contraires, on obtient la *fig. 5*.

La *fig. 4* a été construite dans l'hypothèse où τ_0 et τ_1 sont positifs.

Si les racines de l'équation (13) sont imaginaires, il

Fig. 4.

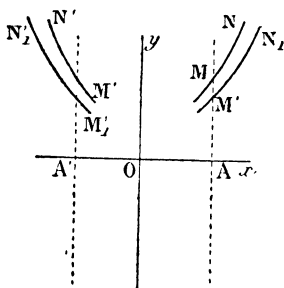
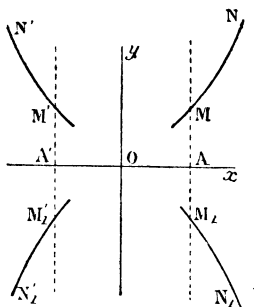


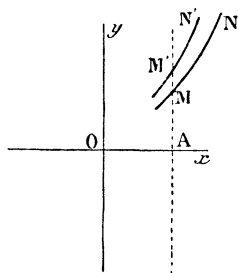
Fig. 5.



n'y a pas de branche parabolique réelle dans la direction de l'axe des y .

Enfin, si les racines de l'équation (13) sont égales

Fig. 6.



entre elles, l'équation (12) pourra se mettre sous la forme

$$\varphi_m^{iv}(0) (\tau - \tau_0)^2 + A\lambda + B\lambda^2 + \dots = 0;$$

les deux valeurs de τ qui ont pour limite τ_0 ont donc

pour valeurs approchées

$$\tau = \tau_0 \pm \sqrt{\frac{-A}{\varphi_m''(0)}} \times \lambda,$$

et, par suite,

$$t = \tau_0 \lambda \pm \sqrt{\frac{-A}{\varphi_m''(0)}} \lambda^3.$$

Ces deux racines donnent naissance aux branches paraboliques de la *fig. 6*.

5. La discussion complète de l'équation (6) dans le cas où $\varphi_{m-2}(0)$ est différent de zéro se fait comme la discussion de l'équation (17) de la première Partie (1); nous n'insisterons pas davantage et nous nous bornerons à remarquer que cette étude ne nous donne que deux nouvelles formes de courbes, comme nous l'avons déjà vu pour les branches qui se croisent à l'origine : ce sont celles que présentent les *fig. 7* et 8; elles sont fournies

Fig 7

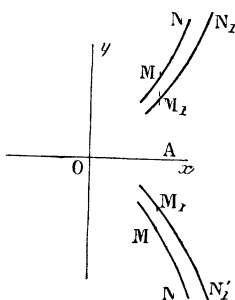
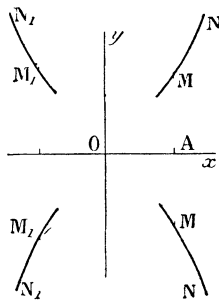


Fig 8



par des valeurs approchées des racines de l'équation (6),

(1) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, t. XIX (novembre 1880)

de la forme

$$t = \sqrt[n]{\tau_0 \times \lambda},$$

$$t = \sqrt[n]{\tau_1 \times \lambda},$$

pour des valeurs paires de n ; la *fig. 7* convient au cas où τ_0 et τ_1 sont de même signe, et la *fig. 8* au cas où τ_0 et τ_1 sont de signes contraires. Dans la *fig. 8*, les quatre branches MN , $M'N'$, M_1N_1 , $M'_1N'_1$ sont fournies par quatre racines différentes; dans la *fig. 7*, au contraire, deux racines infiniment petites fournissent les quatre branches.

Nous allons passer maintenant au cas où la direction multiple des points à l'infini est autre que celle de l'axe des y .
(*A suivre.*)
