

GENTY

Note sur les conditions qui expriment qu'une surface du second degré est de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20 (1881), p. 414-416

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__414_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES CONDITIONS QUI EXPRIMENT QU'UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ EST DE REVOLUTION;

PAR M. GENTY.

Soient

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$$

l'équation d'une surface S du second degré à centre, rapportée à ses trois plans principaux,

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$$

celle de sa polaire réciproque S₁ par rapport à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

L'équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha x & \beta y & \gamma z \\ \frac{x}{\alpha} & \frac{y}{\beta} & \frac{z}{\gamma} \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime que les plans polaires d'un point quelconque (x, y, z) par rapport à la sphère et aux deux quadriques sont parallèles à une même droite, représente les trois plans principaux des surfaces S et S₁; en effet, cette équation développée devient

$$(1) \quad \frac{xyz}{\alpha\beta\gamma} (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est évidemment un covariant, puisqu'il exprime une propriété géométrique des trois surfaces complètement indépendante du choix des axes. Si donc

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0$$

sont les équations des quadriques S et S₁ rapportées maintenant à trois axes rectangulaires quelconques passant par leur centre, l'équation

$$(2) \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ F'_x & F'_y & F'_z \end{vmatrix} = 0$$

représentera les trois plans principaux de ces deux quadriques.

Mais si la surface S est de révolution, deux des trois quantités α, β, γ qui entrent dans l'équation (1) sont égales et le premier membre de cette équation est identiquement nul.

On obtiendra donc les conditions qui expriment que la surface S est de révolution en écrivant que le premier membre de l'équation (2) est identiquement nul.

Soit

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1$$

l'équation développée de la surface S; celle de la surface S₁ sera

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = \Delta,$$

en posant

$$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2,$$

$$A = bc - f^2, \quad B = ca - g^2, \quad G = ab - h^2,$$

$$F = gh - af, \quad G = hf - bg, \quad H = fg - ch,$$

et l'équation (2) prendra la forme

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ ax + hy + gz & hx + by + fz & gx + fy + cz \\ Ax + Hy + Gz & Hx + By + Fz & Gx + Fy + Cz \end{vmatrix} = 0.$$

En identifiant à zéro le premier membre de cette

équation, on obtient de suite les conditions cherchées sous la forme

$$\frac{b-c}{B-C} = \frac{c-a}{C-A} = \frac{a-b}{A-B} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} = \frac{h}{H}.$$

On reconnaît sans peine que l'ensemble de ces équations ne représente que deux conditions réellement distinctes.

En remplaçant F, G et H par leurs valeurs dans les équations

$$\frac{F}{f} = \frac{G}{g} = \frac{H}{h},$$

on a

$$\frac{gh-af}{f} = \frac{hf-bg}{g} = \frac{fg-ch}{h}$$

ou bien

$$a - \frac{gh}{f} = b - \frac{hf}{g} = c - \frac{fg}{h};$$

c'est la forme habituelle des équations de condition.