

S. RÉALIS

Démonstration de propositions énoncées

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 408-411

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__408_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION DE PROPOSITIONS ÉNONCÉES

(voir 2^e série, t. XVII, p. 178);

PAR M. S. RÉALIS.

1^o Si l'équation

$$x^3 + Px + Q = 0$$

admet la racine a , son premier membre est le produit de deux facteurs tels que $x - a$, $x^2 + ax + m$, où m est nécessairement entier si P , Q , a sont entiers.

On a donc

$$P = -a^2 + m, \quad Q = -am,$$

et par suite

$$\begin{aligned} P^2 - 4Qa &= (a^2 + m)^2, \\ (P^2 - 4Qb)(P^2 - 4Qc) &= (a^4 - 4ma^2 - m^2)^2 \\ &= [5(a^2 - 4m)^2 - (2a^2 - 9m)^2]^2 \\ &= [(a^2 - 2m)^2 - 5m^2]^2, \end{aligned}$$

b et c étant les deux autres racines de l'équation.

2° Si les trois racines a, b, c sont entières, l'une d'elles est nécessairement un nombre pair (à cause de $a + b + c = 0$). On peut donc poser

$$a = 2\alpha, \quad b = -\alpha + \beta, \quad c = -\alpha - \beta,$$

α et β étant entiers.

On aura donc

$$P = -(3\alpha^2 + \beta^2), \quad Q = -2\alpha(\alpha^2 - \beta^2),$$

et par suite

$$P^2 - 4Qa = (5\alpha^2 - \beta^2)^2 = [(5\alpha - 2\beta)^2 - 5(2\alpha - \beta)^2]^2,$$

$$P^2 - 4Qb = (\alpha^2 + 4\alpha\beta - \beta^2)^2 \\ = [5\alpha^2 - (\alpha - \beta)^2]^2 = [(\alpha + 2\beta)^2 - 5\beta^2]^2,$$

$$P^2 - 4Qc = (\alpha^2 - 4\alpha\beta - \beta^2)^2 \\ = [5\alpha^2 - (2\alpha + \beta)^2]^2 = [(\alpha - 2\beta)^2 - 5\beta^2]^2.$$

En outre,

$$(P^2 - 4Qb)(P^2 - 4Qc) = [(\alpha^2 - \beta^2)^2 - 16\alpha^2\beta^2]^2.$$

3° Deux racines b, c étant exprimées par des nombres complexes entiers, la troisième racine a ne peut être qu'un nombre pair.

On peut donc poser

$$a = 2\alpha, \quad b = -\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad c = -\alpha - \beta\sqrt{-1},$$

d'où

$$P = -(3\alpha^2 - \beta^2), \quad Q = -2\alpha(\alpha^2 + \beta^2),$$

et par suite

$$P^2 - 4Qa = (5\alpha^2 + \beta^2)^2,$$

$$(P^2 - 4Qb)(P^2 - 4Qc) = [5(2\alpha\beta)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2]^2 \\ = [5(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha^2 - 2\beta^2)^2]^2 \\ = [(\alpha^2 + 9\beta^2)^2 - 5(4\beta^2)^2]^2 \\ = [(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 16(\alpha\beta)^2]^2.$$

4° Nous avons d'abord, par identité,

$$(P^2 - 4Qa)(P^2 - 4Qb)(P^2 - 4Qc) = (P^3 + 8Q^2)^2.$$

Si P et Q sont entiers, et que la quantité

$$-(4P^3 + 27Q^2)$$

soit égale à un carré R^2 , il est visible que

$$\begin{aligned} \pm (P^3 + 8Q^2) &= \frac{\pm 5Q^2 \mp R^2}{4} \\ &= \frac{\pm (5Q + 2R)^2 \pm 5(2Q + R)^2}{4}, \end{aligned}$$

formules où l'on choisira les signes supérieurs, ou les signes inférieurs, de manière que chaque membre soit positif. On peut prouver d'ailleurs qu'un nombre entier compris dans la forme $\frac{5u^2 - v^2}{4}$ est compris aussi dans la forme $5u^2 - v^2$; de même pour un entier compris dans la forme $\frac{u^2 - 5v^2}{4}$ (voir la *Théorie des nombres* de Legendre, t. I, p. 205. Du reste, la preuve dont il s'agit peut aussi se tirer de formules directes, sans rien emprunter à la théorie des nombres).

Si c'est la quantité $4P^3 + 27Q^2$ qui est égale à un carré R^2 , auquel cas Q et R sont nécessairement des nombres pairs, on a

$$P^3 + 8Q^2 = \frac{5Q^2 + R^2}{4},$$

où le second membre est évidemment un nombre de la forme $5u^2 + v^2$.

L'identité qui justifie et complète la proposition énoncée à la fin de la *Remarque* consiste dans la formule

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 4z^2,$$

dan, laquelle

$$z = 3x^2 + \beta^2,$$

$$k = A^2 + (A + B + C)^2 + C^2,$$

$$z_1 = A(2x)^2 + B(2x)(x - \beta) + C(x - \beta)^2,$$

$$z_2 = A(-x + \beta)^2 + B(-x + \beta)(x + \beta) + C(x + \beta)^2,$$

$$z_3 = A(x + \beta)^2 + B(x + \beta)(2x) + C(2x)^2.$$

Cette formule peut s'écrire

$$\left(\frac{z_1}{z}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z}\right)^2 + \left(\frac{z_3}{z}\right)^2 = k.$$

De la sorte, le second membre est indépendant de x et β , et peut représenter tout nombre égal à la somme de trois carrés entiers, tandis que le premier membre peut représenter, d'une infinité de manières, une somme de trois carrés rationnels.