

E. CATALAN

Note sur la question 393

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 403-405

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__403_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA QUESTION 593 (1);

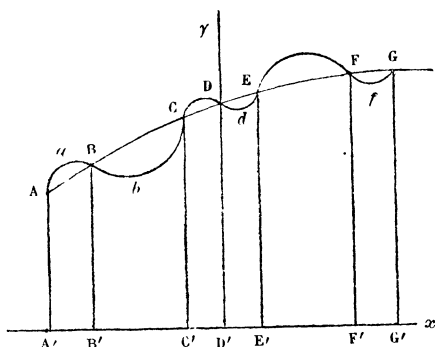
PAR M. E. CATALAN.

Rappelons d'abord la première partie de l'énoncé :

THÉORÈME. — *Étant donnée une parabole ABCDE, du troisième ordre, représentée par*

$$Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

on fait passer, par les extrémités A, C, E de trois or-



données équidistantes, la parabole du second ordre, dont l'équation aurait la forme

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Ces courbes déterminent deux segments curvilignes ABCA, CDEC, équivalents entre eux.

(1) *Nouvelles Annales*, 1^{re} série, t. XVII, p. 5, 205 et 207. On peut consulter, sur le même sujet : *Association française pour l'avancement des Sciences*, sessions de 1879 et 1880; *Bulletin de la Société philomathique de Paris* (1880, Collignon); *Mémoires de l'Académie de Belgique*, t. XLIII; etc.

Cette proposition peut être ainsi modifiée et généralisée.

Soit $ABC \dots EFG$ une parabole, d'ordre impair, représentée par

$$Y = Ax^{2n+1} + Bx^{2n-1} \dots + Gx + H;$$

et soit $AaBb \dots FfG$ la parabole, d'ordre pair, déterminée par les $2n + 1$ points $A, B, \dots, F, G$ ayant, deux à deux, leurs abscisses égales et de signes contraires ⁽¹⁾.

Cela posé, les trapèzes paraboliques $A'AB \dots FGG'$, $A'AaBb \dots FfGG'$ sont équivalents.

Appelons $a, b, \dots, h$ les abscisses des points $F, G, \dots$; et posons

$$f(x) = Ax(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) \dots (x^2 - h^2).$$

Il est visible que l'équation de la seconde parabole est

$$y = Y - f(x) \quad (2).$$

Soient P, p les aires des deux trapèzes. On a

$$P = \int_a^{+a} Y dx, \quad p = \int_a^{+a} y dx;$$

puis

$$P - p = \int_{-a}^{+a} f(x) dx.$$

D'après la forme de $f(x)$, les éléments de la dernière intégrale sont, deux à deux, égaux et de signes contraires; donc cette intégrale est nulle ⁽³⁾, et

$$P = p.$$

⁽¹⁾ Le point D , situé sur l'ordonnée moyenne, fait exception.

⁽²⁾ En outre, toutes les paraboles d'ordre $2n - 1$, passant aux points $A', B', \dots, E', F'$, sont représentées par

$$y = f(x).$$

⁽³⁾ Elle représente l'aire commune de toutes les paraboles dont il est question dans la Note précédente.

COROLLAIRE I. — *Les segments curvilignes correspondants, AaB, FfG, BbC, EeF, ... sont équivalents deux à deux.*

COROLLAIRE II. — *Les trapèzes paraboliques B'BFF', B'BbCc ... eFF', ... sont équivalents deux à deux.*

Remarque sur les courbes paraboliques. — La parabole d'ordre n , déterminée par $n + 1$ points (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ..., (x_n, y_n) a pour équation, comme l'on sait,

$$y = f(x) \left[\frac{y_0}{(x-x_0)f'(x_0)} + \frac{y_1}{(x-x_1)f'(x_1)} + \dots + \frac{y_n}{(x-x_n)f'(x_n)} \right],$$

en supposant

$$f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad (1).$$

Cela posé :

Toutes les paraboles d'ordre $n + 1$, passant en ces $n + 1$ points, sont représentées par

$$y = f(x) \left[\frac{y_0}{(x-x_0)f'(x_0)} + \dots + \frac{y_n}{(x-x_n)f'(x_n)} + A \right].$$

2° Toutes les paraboles d'ordre $n + 2$, passant en ces mêmes points, sont représentées par

$$y = f(x) \left[\frac{y_0}{(x-x_0)f'(x_0)} + \dots + \frac{y_n}{(x-x_n)f'(x_n)} + Ax + B \right].$$

Liège, 21 mai 1881.

(1) D'après la *formule d'interpolation de Lagrange*, ou plutôt, par la *théorie de la décomposition des fractions rationnelles*.