

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1880)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 351-358

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__351_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
(CONCOURS DE 1880).

COMPOSITION DU 9 AOÛT.

Mathématiques spéciales.

On donne un ellipsoïde, et l'on considère un cône ayant pour base la section principale de l'ellipsoïde perpendiculaire à l'axe mineur; ce cône coupe l'ellipsoïde suivant une seconde courbe située dans un plan Q .

1° Le sommet du cône se déplaçant dans un plan donné P , trouver le lieu décrit par le pôle du plan Q par rapport à l'ellipsoïde.

2° Ce lieu est une surface du second degré Σ : on demande de déterminer les positions du plan P pour lesquelles le cône asymptote de cette surface Σ a trois génératrices parallèles aux axes de symétrie de l'ellipsoïde.

3° Le plan P se déplaçant de façon que la surface Σ satisfasse aux conditions précédentes, trouver le lieu des foyers des sections faites dans ces surfaces Σ par un plan fixe R perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde.

4° Trouver la surface engendrée par la courbe, lieu de ces foyers, quand le plan R se déplace parallèlement à lui-même.

COMPOSITION DU 10 AOÛT.

Mathématiques élémentaires.

On donne le côté a d'un triangle ABC , la somme l des deux autres côtés, la somme K^2 des carrés des bissectrices, soit des angles intérieurs adjacents au côté a , soit

des angles extérieurs adjacents au même côté, et l'on demande de calculer les deux autres côtés b et c .

On examinera le cas particulier où $l = 4a$, et, dans ce cas, on discutera complètement les deux problèmes en laissant a fixe et en faisant varier K^2 .

COMPOSITION DU 11 AOÛT.

Théorie.

1° Définir les lignes de courbure et établir leur équation différentielle.

2° Former l'équation qui donne les rayons de courbure principaux en un point d'une surface donnée; établir les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette équation ait deux racines égales.

Application.

Soient u une fonction donnée d'une variable α et u' sa dérivée. Soit $\varphi(\beta)$ une fonction donnée d'une autre variable β . On considère une surface S telle que les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un quelconque de ses points s'expriment par les formules

$$x = (u + \beta) \cos \alpha - u' \sin \alpha,$$

$$y = (u + \beta) \sin \alpha + u' \cos \alpha,$$

$$z = \varphi(\beta).$$

1° Démontrer que les projections, sur le plan xOy , des sections de la surface par des plans parallèles au plan xOy ont même développée.

2° Démontrer que les normales à la surface S aux différents points d'une quelconque de ces sections forment une surface développable, et déterminer l'arête de rebroussement de cette surface.

3° Trouver les lignes de courbure de la surface S et les rayons de courbure principaux en un quelconque de ses points.

Géométrie descriptive.

Intersection d'un cône et d'un parabolôide hyperbolique ayant une génératrice commune.

Données.

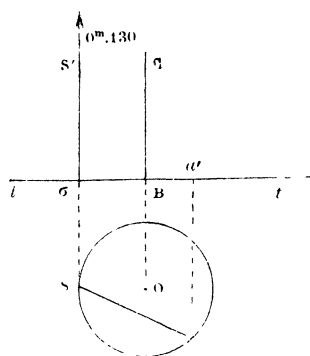
Cône. — La base du cône est un cercle situé dans le plan horizontal et ayant pour centre le point O .

Distance du centre O au bord droit du cadre. $0^m,100$

Distance OB du centre O à la ligne de terre. $0,095$

Rayon du cercle. $0,080$

Le sommet est projeté horizontalement en S , sur le



diamètre du cercle de base parallèle à la ligne de terre, et verticalement en un point S' tel que $S'\sigma = 0^m,130$.

Parabolôide. — Il a pour plan directeur le plan horizontal, pour directrices :

1° La verticale OBC passant par le centre O du cercle base du cône;

2° La génératrice SA du cône dont la projection horizontale fait avec la ligne de terre un angle de 30° .

On limitera le cône au plan horizontal de projection et à un second plan horizontal situé au-dessus du sommet S, à une distance de ce point égale à 0^m,045.

On devra construire le point de la section situé sur la génératrice commune SA, le point où la projection verticale de cette section rencontre son asymptote, ainsi que la tangente en ce point.

Pour distinguer les parties vues des parties cachées, on regardera le cône comme solide et on supposera le parabolôide enlevé.

Les candidats joindront à l'épure, sur une feuille séparée, une explication sommaire de la méthode employée et des constructions effectuées.

Composition sur un sujet de licence.

Première question.

Intégrer les équations différentielles simultanées

$$\frac{dx}{dt} = ax + b'y + b'z,$$

$$\frac{dy}{dt} = b''x + a'y + bz,$$

$$\frac{dz}{dt} = b'x + b'y + a''z,$$

où a, a', a'', b, b', b'' sont des constantes réelles données, et x, y, z des fonctions inconnues de la variable t .

Deuxième question.

On considère un axe vertical Oz, autour duquel tourne, d'après une loi déterminée, mais inconnue, un tube rectiligne OA, de section infiniment petite, qui rencontre l'axe fixe en O et fait avec lui un angle constant θ ; dans l'intérieur du tube peut se mouvoir sans frottement un point pesant M.

1° On demande quelles doivent être, d'une part, la loi de la rotation du tube, de l'autre, les circonstances initiales du mouvement, pour que la distance r du point M au point fixe O soit, à chaque instant t , donnée par la formule

$$r = k(t + \alpha)^2,$$

K et α étant des constantes positives données.

2° Conservant pour le mouvement de rotation du tube la loi précédemment trouvée, ne faisant d'ailleurs aucune hypothèse sur les circonstances initiales, on demande d'étudier le mouvement du point pesant dans le tube.

Calcul.

Étant donnée l'équation

$$z^4 - z + 1 = 0,$$

1° Démontrer qu'elle a toutes ses racines imaginaires;

2° Calculer la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ pour chacune de ces racines. En posant $z = x + yi$, on verra que le problème dépend de la recherche d'une des racines d'une équation du troisième degré; on calculera cette racine à l'aide des Tables trigonométriques avec le degré d'approximation qu'elles comportent.

Mathématiques spéciales. (Leçons.)

1° Équation du plan tangent. — Application aux surfaces du second ordre.

2° Exposer quelques-unes des méthodes à l'aide desquelles on reconnaît la nature d'une surface du second degré donnée par son équation.

3° Asymptotes des courbes rapportées à des coordonnées rectilignes. (Première leçon.)

4° Étant donnée une fonction d'une seule variable, reconnaître au moyen de sa dérivée si elle est croissante ou décroissante. — En déterminer les maxima et les minima.

5° Définition de la fonction a^x . — Étude de cette fonction.

6° $\lim \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m$ quand m devient infini.

7° Théorème de Rolle. — Son usage pour la séparation des racines d'une équation algébrique ou transcendante.

8° Génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.

9° Résolution *algébrique* de l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

Discussion.

10° Plans diamétraux dans les surfaces du second degré.

11° Intersection de deux courbes du second degré. (On ramènera la question à l'étude d'une équation du troisième degré.)

12° Transformation des équations algébriques. (Exemples.)

13° Premières leçons sur les séries.

14° Discussion de l'équation du second degré à deux variables. (Géométrie analytique.)

15° Tangentes et asymptotes en coordonnées polaires.

16° Théorème de Sturm.

17° Conditions pour que l'équation du second degré à trois variables représente une surface de révolution. (Exemples.)

18° Règle des signes de Descartes.

19° Étant donnée l'équation générale d'une ellipse

ou d'une hyperbole, déterminer les axes de la courbe en grandeur et en position.

Étant donnée l'équation générale d'une parabole, déterminer son axe en position et la grandeur du paramètre.

20° Intersection d'un cône et d'un cylindre dans le cas où la courbe d'intersection a des branches infinies. (Géométrie descriptive.)

21° Mener par une droite un plan tangent à un hyperboloïde de révolution à une nappe. (Géométrie descriptive.)

22° Section plane de l'hyperboloïde de révolution à une nappe, dans le cas où la courbe est une hyperbole. (Géométrie descriptive.)

Mathématiques élémentaires. (Leçons.)

1° Résolution et discussion de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

2° Figures symétriques par rapport à un axe, par rapport à un point, par rapport à un plan.

3° Maximum et minimum de l'expression

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

4° Conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale. — Fractions décimales périodiques.

5° Mesure des angles.

6° Volume de la sphère et du segment sphérique.

7° Résolution des équations

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c'.$$

Discussion.

8° Formules relatives à l'addition et à la soustraction des arcs.

9° Plus grand commun diviseur, et plus petit multiple de plusieurs nombres entiers.

10° Recherche du rapport de la circonférence au diamètre (méthode des isopérimètres).

11° Angles trièdres. — Trièdres supplémentaires. — Conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse construire un trièdre avec trois faces données, ou avec trois dièdres donnés. (Géométrie élémentaire.)

12° Racine carrée d'un nombre entier à une unité près. — Racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire avec une approximation donnée.

13° Relations entre les angles et les côtés d'un triangle. (Trigonométrie.)

14° Parabole. (Géométrie élémentaire.)

15° Équation bicarrée. — Transformation des expressions de la forme $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ en une somme, ou en une différence de deux radicaux simples.

16° Division des nombres entiers.

17° Division des polynômes.

18° Propriétés élémentaires des nombres premiers. — Décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

19° Rabattements. — Changements de plan. Rotation.

20° Distance d'un point à un plan, à une droite. — Plus courte distance des deux droites. (Géométrie descriptive.)

21° Mesure de la pyramide et du tronc de pyramide à bases parallèles.

22° Étude des variations du trinôme $ax^2 + bx + c$.

23° Tangentes à l'ellipse. — Problèmes qui s'y rapportent.
