

Concours général de 1880

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 314-321

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__314_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1880

(voir 2^e série, t. XX, p. 131)

PHILOSOPHIE.

PAR M. MORET-BLANC.

La Terre étant supposée sphérique, on considère le point M de la surface dont la latitude est égale à la longitude :

1^o *Déterminer le lieu des projections M sur le plan de l'équateur ;*

2^o *Déterminer le lieu des droites AM, A étant le point de l'équateur à partir duquel on compte les longitudes.*

Soient O le centre de la Terre et B le point où le demi-méridien de M coupe l'équateur.

1^o Les arcs MB, AB étant égaux, les points M et A se projettent au même point *m* sur l'intersection OB des plans de l'équateur et du méridien de M. Le point *m* est la projection de M sur le plan de l'équateur. L'angle AmO étant droit, le lieu du point *m* est la circonférence décrite sur AO comme diamètre.

2^o Le triangle AmM étant rectangle en *m* et de plus isocèle, l'angle MAm de la droite AM et de sa projection Am sur le plan de l'équateur est de 45°. Par suite, la droite AM fait, de même, un angle de 45° avec la per-

pendiculaire AC, élevée en A au plan de l'équateur. La droite AM appartient donc à la surface d'un cône de révolution ayant A pour sommet et AC pour axe, et dont les génératrices font avec l'axe un angle de 45° . Le lieu de la droite AM est la partie de la surface de ce cône qui est, par rapport au plan tangent à la sphère en A, située du même côté que la sphère.

RHÉTORIQUE.

PAR M. MORET-BLANC.

Aux deux extrémités A et B du diamètre AB d'un demi-cercle, on lui mène deux tangentes; on construit ensuite une troisième tangente qui coupe les deux premières aux points C et D. On demande de déterminer cette troisième tangente de manière que le volume engendré par le trapèze ABDC en tournant autour du diamètre AB, et la sphère engendrée par la révolution du demi-cercle autour de son diamètre, soient entre eux dans le rapport de m à 1. Discussion.

Soient O le centre du demi-cercle, R son rayon et E le point de contact de la tangente CD. Posons

$$AC = x, \quad BD = y.$$

Le trapèze ABDC, en tournant autour de AB, engendre un tronc de cône dont le volume a pour expression

$$\frac{2}{3} \pi R (x^2 + y^2 + xy),$$

et l'on a

$$\frac{2}{3} \pi R (x^2 + y^2 + xy) = \frac{4}{3} \pi m R^3$$

(316)

ou

$$(1) \quad x^2 + y^2 + xy = 2mR^2.$$

Les lignes OC, OD étant les bissectrices des angles supplémentaires DCA, CDB, la somme des angles OCD et ODC égale un droit, et, par suite, l'angle COD est droit. D'ailleurs

$$AC = CE = x, \quad DE = y.$$

Le triangle rectangle COD donne

$$(2) \quad xy = R^2.$$

En combinant les équations (1) et (2), on a

$$(x + y)^2 = (2m + 1)R^2,$$

$$(x - y)^2 = (2m - 3)R^2,$$

d'où

$$x = \frac{R}{2} [\sqrt{2m+1} + \sqrt{2m-3}],$$

$$y = \frac{R}{2} [\sqrt{2m+1} - \sqrt{2m-3}].$$

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'on ait

$$m > \frac{3}{2}.$$

Dans le cas du minimum,

$$m = \frac{3}{2}, \quad x = y = R.$$

Le tronc de cône se réduit au cylindre circonscrit à la sphère.

SECONDE.

PAR UN ABONNÉ.

— — —

Sur le côté BC d'un triangle ABC, ou sur son prolongement, on prend un point arbitraire D, et l'on fait passer deux circonférences, l'une par les points A, B, D, l'autre par les points A, C, D; soient O, O' les centres de ces circonférences. On propose :

1° De démontrer que le rapport des rayons de ces circonférences est indépendant de la position du point D sur le côté BC;

2° De déterminer la position que doit occuper le point D pour que les deux rayons aient la plus petite longueur possible ;

3° De démontrer que le triangle AOO' est semblable au triangle ABC;

4° De trouver le lieu décrit par le point M qui partage la droite OO' dans le rapport de deux longueurs données m, n; on examinera le cas particulier où le point M est le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur OO'.

La droite OO' étant perpendiculaire à AD en son milieu d, les angles AOd, ABD ont chacun pour mesure la moitié de l'arc AD de la circonférence O, et les angles AO'd, ACd ont pour mesure la moitié de l'arc AD de la circonférence O'; donc

$$\widehat{AOO'} = \widehat{ABC} \quad \text{et} \quad \widehat{AO'O} = \widehat{ACB},$$

d'où

$$\frac{AO}{AO'} = \frac{AB}{AC},$$

et, par conséquent :

1° Le rapport des rayons AO, AO' des circonférences

O, O' est indépendant de la position du point D sur le côté BC.

2° Les angles des triangles rectangles AdO, AdO' étant invariables, il en est de même des rapports

$$\frac{AO}{Ad}, \quad \frac{AO'}{Ad};$$

il s'ensuit que les plus petites valeurs des rayons AO, AO' correspondent au minimum de Ad ou de AD; le minimum de AD est la perpendiculaire abaissée du point A sur BC. Les centres O, O' coïncident alors avec les milieux b, c des côtés AB, AC, et les rayons AO, AO' des circonférences O, O' ont pour valeurs

$$\frac{AB}{2}, \quad \frac{AC}{2}.$$

3° Le triangle AOO' est semblable au triangle ABC, puisque les angles AOO', AO'O sont égaux respectivement aux angles ABC, ACB.

4° Soit m le point qui partage la droite bc dans le rapport donné de OM à MO'; les triangles bAm, OAm seront semblables, et l'on aura

$$\widehat{bAm} = \widehat{OAm} \quad \text{et} \quad \frac{Ab}{Am} = \frac{AO}{AM}.$$

Il en résulte que les triangles bAO, mAM sont, de même, semblables. En effet

$$\widehat{bAO} = \widehat{mAM},$$

parce que ces angles sont égaux aux angles bAm, OAm, augmentés ou diminués, tous deux, de l'angle OAm. De plus, l'égalité

$$\frac{Ab}{Am} = \frac{AO}{AM}$$

donne

$$\frac{Ab}{AO} = \frac{Am}{AM};$$

donc les triangles bAO , mAM sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre des côtés proportionnels. Mais le triangle bAO est rectangle en b ; donc l'angle AmM est droit. Par conséquent, le lieu géométrique du point M est la perpendiculaire menée à la droite Am , au point m .

Lorsque AM est perpendiculaire sur OO' , la droite bc est perpendiculaire à Am , puisque les triangles bAm , OAM sont semblables, et, dans ce cas, le lieu géométrique de M est la droite bc qui passe par les milieux b , c des côtés AB , AC .

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et J. Delacourcelle, élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Tarbes.

TROISIÈME.

PAR M. MORET-BLANC.

PREMIÈRE QUESTION. — *Par les deux extrémités d'une droite AB , et d'un même côté de cette droite, on lui élève deux perpendiculaires AC et BD , telles que l'aire du trapèze $ABCD$ ait une valeur constante donnée. Du milieu E de la droite AB , on abaisse une perpendiculaire EM sur la droite CD . Trouver le lieu décrit par le pied M de cette perpendiculaire quand on fait varier les longueurs des perpendiculaires AC et BD .*

Même problème quand les lignes AC et BD , au lieu d'être perpendiculaires à AB , sont parallèles à une droite fixe donnée.

Soit m^2 l'aire donnée du trapèze ABCD. On a

$$\frac{AC}{2} - \frac{BD}{2} = AB \cdot m^2.$$

Soit F le milieu de CD; la ligne EF, parallèle à AC et à BD, sera perpendiculaire à AB et égale à

$$\frac{AC}{2} - \frac{BD}{2} = \frac{m^2}{AB},$$

troisième proportionnelle à AB et m .

Ayant élevé EF, perpendiculaire sur le milieu de AB et égale à cette longueur, le point F est le milieu de CD dans toutes ses positions. L'angle EMF étant droit, le lieu du point M est la circonférence décrite sur EF comme diamètre.

Si AC et BD sont parallèles à une droite fixe donnée, soit d leur distance; il faudra prendre $EF = \frac{m^2}{d}$ et parallèle à la droite donnée: le lieu du point M sera encore la circonférence décrite sur EF comme diamètre.

DEUXIÈME QUESTION. — *Construire un quadrilatère inscrit, connaissant les deux diagonales, l'angle qu'elles forment entre elles, et le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère. Discussion.*

Soient r le rayon du cercle circonscrit, d et d' les deux diagonales dont aucune évidemment ne doit surpasser $2r$, et θ leur angle.

Décrivons une circonférence avec le rayon donné, et dans cette circonférence inscrivons une corde AC, égale à la diagonale d ; abaissons du centre O la perpendiculaire OI sur la corde AC; menons par O une droite qui fasse avec OI l'angle donné θ , et prenons sur cette droite

$$OH = OH' = \sqrt{r^2 - \frac{d'^2}{4}}.$$

La corde BD, menée par H ou par H' perpendiculairement à HH', sera la seconde diagonale du quadrilatère; mais, pour que ce quadrilatère soit convexe, il faut que les deux diagonales se rencontrent à l'intérieur du cercle.

Projetons A et C sur HH', en a et c . Si les deux points H et H' sont situés entre a et c , il y aura deux quadrilatères convexes satisfaisant à la question; si un seul des points H, H' est compris entre a et c , à ce point correspondra un quadrilatère convexe et à l'autre un quadrilatère étoilé. Si les deux points H et H' sont hors du segment ac , les deux quadrilatères seront étoilés.

Si l'on faisait l'angle θ de l'autre côté de OI, on obtiendrait des solutions symétriques des premières par rapport à OI, et par conséquent des quadrilatères égaux aux précédents.