

A. LEINEKUGEL

Concours général de 1879

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 307-314

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__307_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1879

(voir 2^e série, t. XIX, p. 1-4)

RHÉTORIQUE.

PAR M. A. LEINEKUGEL.

Soit AB une portion de droite de longueur donnée; on prend entre A et B, sur la droite AB, un point C, et sur AC comme diamètre on décrit une demi-circonférence; par le point B on mène une tangente à cette demi-circonférence; soit D le point de contact, et soit E le point où cette tangente rencontre la perpendiculaire menée à la droite AB par le point A :

Déterminer le point C de telle façon que, si l'on fait tourner la figure autour de la droite AB, la surface engendrée par l'arc de cercle AD et la surface engendrée par la portion de droite BE soient dans un rapport égal à un nombre donné m.

Indiquer les conditions de possibilité. Appliquer, dans le cas particulier où m est égal à $\frac{1}{2}$, et dans ce cas trouver le rapport des surfaces engendrées par les deux portions BD, DE de la droite BE.

Soient $AB = l$, $AC = 2x$, et H le pied de la perpendiculaire abaissée du point de tangence D sur la droite AB.

Les surfaces que décrivent l'arc de cercle AD et la portion de droite BE ayant respectivement pour mesure $2\pi x.AH$ et $\pi.BE.AE$, on a, d'après l'énoncé,

$$(1) \quad 2x.AH = m.BE.AE.$$

Soit O le centre du cercle décrit sur AC comme diamètre; le triangle rectangle ODB donne

$$OD^2 = OH.OB = OH(l-x),$$

d'où

$$OH = \frac{OD^2}{l-x} = \frac{x^2}{l-x},$$

et par suite

$$(2) \quad AH = x + \frac{x^2}{l-x} = \frac{lx}{l-x}.$$

En outre, les triangles rectangles ODB, BAE étant semblables, on a

$$\frac{BE}{BO} = \frac{AE}{OD} = \frac{BA}{BD},$$

ou, parce que $BD = \sqrt{BA.BC} = \sqrt{l(l-2x)}$,

$$\frac{BE}{l-x} = \frac{AE}{x} = \frac{l}{\sqrt{l(l-2x)}};$$

(309)

il s'ensuit

$$BE = \frac{l(l-x)}{\sqrt{l(l-2x)}}, \quad AE = \frac{lx}{\sqrt{l(l-2x)}},$$

d'où

$$(3) \quad BE \cdot AE = \frac{lx(l-x)}{l-2x}.$$

En remplaçant, dans l'équation (1), AH et BE.AE par les valeurs obtenues (2) et (3), il vient

$$\frac{2lx^2}{l-x} = m \frac{lx(l-x)}{l-2x},$$

et, en réduisant,

$$(4) \quad x^2(m+4) - 2l(m+1)x + ml^2 = 0.$$

La condition de réalité des racines de cette équation, c'est-à-dire de la possibilité du problème proposé, est

$$m \leq \frac{1}{2}.$$

Dans le cas particulier de $m = \frac{1}{2}$, les deux racines sont égales à $\frac{l}{3}$, et la valeur de AH devient

$$\frac{l \frac{l}{3}}{l - \frac{l}{3}} = \frac{l}{2} = \frac{AB}{2}.$$

Le point H étant alors au milieu de AB, on a

$$HD = \frac{1}{2} AE, \quad BD = \frac{1}{2} BE;$$

il en résulte

$$\frac{\text{surf } BD}{\text{surf } BE} = \frac{1}{4},$$

et, par conséquent, le rapport des surfaces engendrées

par les deux portions BD, DE de la droite BE est égal à $\frac{1}{3}$.

Note. La même question a été résolue par M. LEZ.

SECONDE.

PAR M. H. LEZ.

PREMIÈRE QUESTION. -- On donne deux droites parallèles RR' , SS' , et une droite perpendiculaire à ces parallèles rencontrant RR' en A et SS' en B. Sur RR' , à partir du point A, on porte une longueur arbitraire AA' , et sur SS' à partir du point B, et du même côté par rapport à AB, on porte une longueur BB' telle que le produit des longueurs AA' , BB' soit égal au carré de AB; on mène les droites AB' et BA' , et l'on désigne par M leur point de rencontre; on mène par le point M une perpendiculaire à AB, et l'on désigne par P et Q les points où elle rencontre les droites AB, $A'B'$. Enfin, on désigne par C le point où la droite $A'B'$ rencontre la droite AB.

1° Trouver le lieu décrit par le point M quand on fait varier la longueur AA' ;

2° Démontrer que le point M est le milieu de PQ;

3° Démontrer que la tangente au point M à la courbe que décrit ce point passe par le point C.

1° Si l'on prend sur la droite SS' , à partir du point B, et dans le sens opposé à BB' , la longueur $BD = AA'$, le quadrilatère $ADBA'$ sera un parallélogramme; et, à cause de la relation $AB^2 = BD \cdot BB'$, le triangle DAB' sera rectangle en A. Les droites BM, DA étant parallèles, l'angle

BMA est le supplément de l'angle droit DAM; donc l'angle BMA est droit, et, par conséquent, le lieu du point M est la circonférence décrite sur AB comme diamètre.

2° On sait que la droite menée du point C de rencontre des côtés AB, A'B' non parallèles d'un trapèze au point M d'intersection des diagonales passe par les milieux E, F des bases AA', BB'. La droite PQ, étant parallèle aux bases AA' et BB', sera divisée en deux parties égales par la droite CEF; donc M est le milieu de PQ.

3° Soit O le centre de la circonférence décrite sur AB comme diamètre; les droites MO, MF étant menées du sommet M de l'angle droit des triangles rectangles AMB, BMB' aux milieux O, F des hypoténuses AB, BB', on a

$$\widehat{OMB} = \widehat{OBM} \quad \text{et} \quad \widehat{FMB} = \widehat{FBM};$$

il s'ensuit

$$\widehat{OMB} + \widehat{FMB} = \widehat{OBM} + \widehat{FBM}$$

ou

$$\widehat{OMF} = \widehat{OBF}.$$

Donc l'angle OMF ou OMC est droit, et, par conséquent, la tangente au point M à la circonférence que décrit ce point passe par le point C.

DEUXIÈME QUESTION. — Soit a la longueur du côté d'un triangle équilatéral ABC : calculer la distance du point A à un point M situé sur AB, entre A et B, de façon que, si l'on désigne par P et Q les pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés AC, BC du triangle, le rapport de l'aire du quadrilatère APQB à l'aire du triangle ABC soit égal à un nombre donné m .

Indiquer les conditions de possibilité; appliquer en

(312)

supposant $m = \frac{15}{32}$, et, dans ce cas, déterminer par une construction géométrique la position du point M.

En désignant par x la distance cherchée AM, on voit facilement que, les angles MAP, MBQ étant de 60° , on a

$$AP = \frac{AM}{2} = \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad BQ = \frac{BM}{2} = \frac{a-x}{2}.$$

Si l'on abaisse des points B et Q des perpendiculaires BH, QR sur AC, la similitude des triangles QCR, BCH donnera

$$\frac{QR}{QC} = \frac{BH}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} QR = QC \frac{\sqrt{3}}{2} = (BC - BQ) \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \left[a - \left(\frac{a-x}{2} \right) \right] \frac{\sqrt{3}}{2} = (a-x) \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{array} \right.$$

D'autre part,

$$PC = AC - AP = a - \frac{x}{2}.$$

Ainsi, l'aire du triangle PQC, ou $\frac{PC \cdot QR}{2}$, a pour valeur

$$\frac{1}{2} \left(a - \frac{x}{2} \right) (a+x) \frac{\sqrt{3}}{4}; \quad \text{ou} \quad (2a-x)(a+x) \frac{\sqrt{3}}{16}.$$

Or, le quadrilatère APQB s'obtient en retranchant du triangle ABC le triangle PQC; donc l'aire

$$APQB = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} - (2a-x)(a+x) \frac{\sqrt{3}}{16} = (x^2 - ax + 2a^2) \frac{\sqrt{3}}{16},$$

et le rapport $\frac{APQB}{ABC}$ a pour expression

$$\frac{x^2 - ax + 2a^2}{4a^2}.$$

Donc, d'après l'énoncé,

$$\frac{x^2 - ax + 2a^2}{4a^2} = m$$

ou

$$(1) \quad x^2 - ax - 2a^2(1 - 2m) = 0.$$

Cette équation donne

$$x = \frac{a}{2} (1 \pm \sqrt{16m - 7}).$$

Pour $m < \frac{7}{16}$, les deux racines de l'équation sont imaginaires; si $m = \frac{7}{16}$, les deux racines sont égales à $\frac{a}{2}$; le point M est alors le milieu de AB.

Lorsque m est compris entre $\frac{7}{16}$ et $\frac{1}{2}$, les deux racines sont réelles, positives et moindres que a ou AB. Pour $m = \frac{15}{32}$, par exemple, $x = \frac{a}{2} \left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ les valeurs de x ou de AM sont, dans ce cas particulier, égales à la moitié du côté AB du triangle équilatéral, augmenté ou diminué du quart de la diagonale du carré construit sur ce côté.

Si $m = \frac{1}{2}$, on a

$$x = 0 \text{ et } x = a.$$

Pour $m > \frac{1}{2}$, l'une des deux racines de l'équation (1) est négative; l'autre est positive, mais plus grande que le côté a du triangle équilatéral. Ainsi, la question n'admet aucune solution lorsque le nombre donné m est égal à

(314)

$\frac{1}{2}$ ou plus grand que $\frac{1}{2}$; elle est, de même, impossible quand m est moindre que $\frac{7}{16}$.

Note. - Solution analogue de M. Leinekugel.