

A. LETNIKOW

**Sur les propriétés principales des foyers
des courbes du second degré et sur la
détermination analytique de ces points**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 289-304

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__289_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES PROPRIÉTÉS PRINCIPALES DES FOYERS DES COURBES DU SECOND DEGRÉ ET SUR LA DÉTERMINATION ANALYTIQUE DE CES POINTS;

PAR M. LE D^r A. LETNIKOW,

Professeur à l'École impériale technique de Moscou.

1. Nous supposons que la courbe du second degré rapportée aux coordonnées rectilignes quelconques est représentée par l'équation générale

$$(1) \quad f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Soient x_1, y_1 les coordonnées inconnues d'un foyer, et appelons ρ le rayon vecteur mené du foyer au point quelconque de la courbe donnée; en adoptant la définition connue des foyers indiquée par Euler, nous aurons

$$\rho = Mx + Ny + Q,$$

où M, N et Q sont les coefficients à déterminer, avec la condition que la fonction linéaire représentant le rayon vecteur doit avoir la valeur positive pour tous les points de la courbe donnée.

On démontre très facilement que les foyers, comme les définit Euler, n'existent que dans les courbes du second degré.

Pour la commodité des calculs, nous représenterons dans la suite la fonction linéaire ci-dessus sous la forme

$$(2) \quad \rho = M(x - x_1) + N(y - y_1) + K.$$

L'équation

$$(3) \quad M(x - x_1) + N(y - y_1) + K = 0,$$

où x et y sont les coordonnées courantes, représentera

une droite nommée *directrice* de la courbe du second degré. La distance δ d'un point quelconque de la courbe (1) à la directrice (3) sera

$$\delta = V | M(x - x_1) - N(y - y_1) + K |,$$

où

$$V = \frac{\sin \theta}{\sqrt{M^2 + N^2 - 2MN \cos \theta}},$$

θ étant l'angle des axes des coordonnées; d'ailleurs, $V > 0$. On aura donc

$$\frac{\rho}{\delta} = \frac{1}{V} = \varepsilon \quad \text{ou} \quad \rho = \varepsilon \delta,$$

où ε est une constante positive que l'on nomme *excentricité* de la courbe (1).

2. Il est évident qu'en général la directrice ne coupe pas la courbe, car autrement, pour le point d'intersection, on aurait $\delta = 0$, et, par conséquent, $\rho = 0$, et le foyer (x_1, y_1) , dans ce cas singulier, serait situé sur la courbe. Le lieu géométrique déterminé par la condition $\rho = \varepsilon \delta$ se réduirait, dans ce cas, au système de deux droites concourantes au point foyer et formant avec la directrice de deux côtés un même angle φ déterminé par l'égalité $\varepsilon = \frac{1}{\sin \varphi}$. L'expression du rayon vecteur serait alors

$$\rho = M(x - x_1) - N(y - y_1).$$

Laissant de côté ce cas exclusif, qui ne présente pas d'intérêt, nous admettrons, dans la suite, que la directrice ne coupe pas la courbe.

3. Menons, par le foyer $F_1, (x_1, y_1)$, une droite parallèle à la directrice; il est évident que sur cette droite il y aura deux points L et L' du lieu considéré, ces points

étant déterminés par leurs distances du foyer

$$FL = FL' = \varepsilon D,$$

où D est la distance du foyer à la directrice. La corde LL' est divisée par le point F en deux parties égales; donc son équation est

$$X_1(x - x_1) - Y_1(y - y_1) = 0,$$

où

$$X_1 = f'_1(x_1, y_1) \quad \text{et} \quad Y_1 = g'_1(x_1, y_1).$$

L'équation de la directrice comme parallèle à la corde LL' pourra donc s'écrire sous la forme

$$(4) \quad X_1(x - x_1) - Y_1(y - y_1) + k = 0,$$

où k est une constante inconnue. La comparaison de l'équation (4) à l'équation (3) nous donne les relations

$$M = \lambda X_1, \quad N = \lambda Y_1, \quad K = \lambda k,$$

λ étant un facteur positif ou négatif. On aura, de plus,

$$(5) \quad \rho = \lambda [X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + k].$$

Le signe de λ sera déterminé par la condition que ρ doit être positif.

4. Soit M, (x, y) , un point quelconque de notre courbe; menons le rayon vecteur FM et supposons qu'il coupe la courbe en un autre point N, (x', y') ; nous devons avoir

$$(6) \quad \begin{cases} FM = \lambda [X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + k], \\ FN = \lambda [X_1(x' - x_1) + Y_1(y' - y_1) + k]. \end{cases}$$

L'équation de la corde MN passant par le point F est

$$(7) \quad \frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = r,$$

où

$$p = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta}, \quad q = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta},$$

α étant l'angle formé par cette droite avec l'axe des x ,
 r la distance positive ou négative de deux points (x, y)
 et (x_1, y_1) , en prenant $r > 0$ si l'on a $y > y_1$, et en ad-
 mettant $r < 0$ si le point (x, y) est situé sur la droite
 considérée du côté où $y < y_1$. On aura d'ailleurs, comme
 on sait, cette relation entre p et q :

$$p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta = 1.$$

Supposons que le point M, (x, y) , de la courbe est
 situé sur la droite (7), du côté où $y > y_1$; alors on aura

$$(8) \quad \text{FM} = \frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q}.$$

Il serait facile de faire voir que l'autre point d'inter-
 section N, (x', y') , ne pourra pas se trouver sur la
 droite (7) du même côté du point F comme le point M,
 c'est-à-dire du côté où $y > y_1$, car l'égalité

$$\text{FN} = \frac{x' - x_1}{p} = \frac{y' - y_1}{q}$$

nous conduirait nécessairement à la conclusion que le
 point N coïncide avec le point M. Donc, si nous considé-
 rons les points de la courbe pour lesquels le rayon vecteur
 s'exprime par la formule (5), nous devons supposer que
 l'autre point d'intersection N, s'il existe, se trouve sur la
 droite (6) du côté du point F où $y < y_1$, et nous au-
 rons, par conséquent,

$$(9) \quad -\text{FN} = \frac{x' - x_1}{p} = \frac{y' - y_1}{q}.$$

L'élimination de x et y et de x' et y' des formules (6)
 au moyen des égalités (8) et (9) nous donne

$$\begin{aligned} \text{FM} &= \lambda [-(X_1 p + Y_1 q) \text{FM} + k], \\ \text{FN} &= \lambda [-(X_1 p - Y_1 q) \text{FN} + k]. \end{aligned}$$

En éliminant ensuite $X_1 p + Y_1 q$ entre ces deux équations, nous aurons l'expression d'un théorème connu,

$$(10) \quad \frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{2}{k\lambda} = \text{const.},$$

savoir, que *la moyenne harmonique entre les deux segments déterminés par le foyer sur une corde focale est constante.*

Si d'ailleurs nous appliquons l'égalité (10) à la corde LL' , dont la longueur $LL' = 2P$ est ce qu'on appelle le *paramètre* de la courbe, nous verrons que la constante de la dernière équation est égale à $\frac{2}{P}$, et, par conséquent, le demi-paramètre

$$P = k\lambda.$$

5. Maintenant nous pouvons déterminer la constante k en fonction des coordonnées du foyer.

Désignons, pour abrégér, la première partie de l'équation (1) par u ; alors, en éliminant x et y entre les équations (1) et (7), nous aurons, pour les points d'intersection de la droite (7) avec la courbe (1), l'équation

$$(11) \quad sr^2 + tr + u_1 = 0,$$

en désignant par u_1 la valeur de la fonction $u = f(x, y)$ quand on y met x_1 et y_1 au lieu de x et y , et en posant, pour abrégér,

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bpq + Cq^2 &= s, \\ X_1 p + Y_1 q &= t. \end{aligned}$$

Soient r_1 et r_2 les deux racines de l'équation (11); nous aurons

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = -\frac{t}{u_1}.$$

Posons $r_1 = FM$; alors $r_2 = -FN$, et, d'après la rela-

tion (18), nous pouvons écrire

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{2}{k\lambda}.$$

En prenant la somme des deux dernières égalités, nous trouverons

$$2k\lambda u_1 = (2u_1 - k\lambda t)r_1.$$

Mais la formule (5), jointe aux équations (7), nous donnera

$$r_1 = \lambda t r_1 + k\lambda;$$

en éliminant r_1 entre cette dernière équation et la précédente, nous trouverons très facilement

$$k = 2u_1.$$

De manière que la formule (5) deviendra

$$(12) \quad \rho = \lambda [X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1],$$

et l'équation de la directrice sera

$$(13) \quad X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1 = 0.$$

D'après cette équation, on voit immédiatement que *la directrice est la polaire du foyer*.

De ce que cette droite, étant une polaire, ne coupe pas la courbe, nous concluons que son pôle, c'est-à-dire *le foyer de la courbe, se trouve du côté intérieur du plan de la courbe*, et, par suite, que du foyer on ne peut pas mener des tangentes réelles à la courbe.

6. Le théorème exprimé par la relation (10) nous conduira immédiatement aux équations qui servent à déterminer les coordonnées du foyer. En effet, l'équation (11) nous donne

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \pm \sqrt{\frac{t^2 - 4su_1}{u_1}},$$

et, d'après la relation (10), nous devons avoir

$$(14) \quad \pm \frac{\sqrt{t^2 - 4su_1}}{u_1} = \frac{2}{k\lambda} - \frac{1}{\lambda u_1} = \text{const.},$$

c'est-à-dire que cette expression ne doit pas dépendre de la direction de la corde focale considérée; autrement dit, la valeur de l'expression $t^2 - 4su_1$ doit être indépendante de paramètres angulaires p et q , qui déterminent la direction de la corde. Mais on a

$$t^2 - 4su_1 = (X_1^2 - 4Au_1)p^2 + (Y_1^2 - 4Cu_1)q^2 + 2(X_1Y_1 - 2Bu_1)pq,$$

et nous pouvons poser

$$\frac{(X_1^2 - 4Au_1)p^2 + (Y_1^2 - 4Cu_1)q^2 + 2(X_1Y_1 - 2Bu_1)pq}{p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta} = \text{const.}$$

Cette dernière condition nous mène aux équations

$$\frac{X_1^2}{1} - \frac{4Au_1}{1} = \frac{Y_1^2}{1} - \frac{4Cu_1}{1} = \frac{X_1Y_1 - 2Bu_1}{\cos \theta},$$

qui peuvent s'écrire sous la forme

$$(15) \quad \begin{cases} X_1^2 - Y_1^2 = 4(A - C)u_1, \\ X_1Y_1 - 2Bu_1 = (X_1^2 - 4Au_1) \cos \theta, \end{cases}$$

et sont les équations connues qui déterminent les coordonnées d'un foyer de la courbe du second degré (1). Nous aurons d'ailleurs, d'après l'équation (14),

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{X_1^2 - 4Au_1}},$$

et, par conséquent, le demi-paramètre P se déterminera par la formule

$$(16) \quad P = \frac{2u_1}{\sqrt{X_1^2 - 4Au_1}}.$$

Ainsi, le paramètre de la courbe (1), l'expression du rayon vecteur (12) et l'équation de la directrice correspondante seront complètement connus si nous déterminons les coordonnées du foyer au moyen des équations (15).

7. En éliminant u_1 entre les deux équations (15), nous trouverons

$$(B - 2C \cos \theta) X_1^2 - 2(A - C) X_1 Y_1 - (B + 2A \cos \theta) Y_1^2 = 0,$$

et cette équation représente, comme l'on sait, les axes de la courbe du second degré : donc *les foyers se trouvent sur les axes de la courbe*.

Dans le cas de la parabole, on a $B^2 - 4AC = 0$, et si, au moyen de cette condition, on élimine A de la dernière équation, on trouve sans difficulté que le premier membre se décompose en produit de deux facteurs linéaires, de manière que l'équation considérée peut se représenter sous la forme

$$[(2C \cos \theta - B) X_1 + (B \cos \theta - 2C) Y_1](2C X_1 - B Y_1) = 0,$$

et, comme pour le cas de la parabole le facteur

$$2C X_1 - B Y_1 = 2CD - BE,$$

et, par suite, est une constante qui n'est pas égale à zéro, l'équation des axes se réduira à

$$(17) \quad (2C \cos \theta - B) X_1 + (B \cos \theta - 2C) Y_1 = 0,$$

c'est-à-dire à une équation du premier degré qui représente l'axe de la parabole, le seul qui existe et sur lequel sera situé le foyer cherché.

Les conclusions de ce paragraphe résultent aussi directement de la propriété de la courbe exprimée par la relation ci-dessus $\rho = e\delta$, d'après laquelle on reconnaît très facilement que tous les points du lieu considéré sont

disposés symétriquement par rapport à la droite menée par le foyer perpendiculairement à la directrice; donc *le foyer est situé sur un axe de la courbe perpendiculaire à la directrice.*

8. Passons maintenant au calcul des coordonnées du foyer, et considérons d'abord les courbes ayant un centre. Comme le foyer est situé sur un axe, ses coordonnées x_1 et y_1 doivent satisfaire à l'équation d'un axe, et l'on aura

$$(18) \quad y_1 - \beta = \mu(x_1 - \alpha),$$

où α et β sont les coordonnées connues du centre de la courbe et μ est le coefficient angulaire d'un des axes, ce coefficient étant une des deux racines de l'équation connue

$$(19) \quad (B - 2C \cos \theta) \mu^2 + 2(A - C) \mu - (B - 2A \cos \theta) = 0.$$

De cette manière, les coordonnées du foyer se déterminent par la résolution d'une des équations (15), combinée avec l'équation (18). Pour abréger le calcul, nous prendrons pour inconnues

$$x_1 - \alpha = x' \quad \text{et} \quad y_1 - \beta = y',$$

x' et y' étant les coordonnées du foyer par rapport aux axes des coordonnées menées par le centre, parallèlement aux axes primitifs. L'introduction de ces inconnues nous donne

$$\begin{aligned} X_1 &= 2Ax' + By', \\ Y_1 &= Bx' + 2Cy', \\ u_1 &= u_0 + Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2, \end{aligned}$$

où u_0 désigne la valeur de la fonction u quand on y change x et y en α et β .

Les équations (15) deviendront

$$(20) \quad \begin{cases} x'^2 - y'^2 + \frac{4(A-C)u_0}{B^2 - 4AC} = 0, \\ x'y' + \cos \theta y'^2 + \frac{H(B - 2A \cos \theta)}{B^2 - 4AC} = 0 \end{cases}$$

où

$$H = \frac{AE^2 + CD^2}{B^2 - 4AC} - \frac{BDE}{B^2 - 4AC} - \frac{F(B^2 - 4AC)}{B^2 - 4AC} = u_0.$$

L'équation (18) s'écrira

$$y' = \mu x.$$

Cette équation, combinée avec la première des équations (20), nous donnera

$$(21) \quad \begin{cases} x'^2 = \frac{4(A-C)u_0}{B^2 - 4AC} \frac{1}{1 - \mu^2}, \\ y'^2 = \frac{4(A-C)u_0}{B^2 - 4AC} \frac{\mu^2}{1 - \mu^2}. \end{cases}$$

La constante μ pourra admettre ici deux valeurs différentes, et, par conséquent, on aura deux couples de valeurs correspondantes de x' et de y' . On aura ainsi quatre foyers situés, par deux, sur les deux axes de la courbe et disposés symétriquement par rapport au centre. Mais il nous sera facile de faire voir que deux de ces foyers seront imaginaires et qu'il n'y aura que deux foyers réels, situés sur un même axe et éloignés à des distances égales du centre de la courbe.

En effet, soient μ et μ' les deux racines de l'équation (19), et appelons x'_1 la valeur de x' correspondante à la racine μ' ; on aura

$$x_1'^2 = - \frac{4(A-C)u_0}{B^2 - 4AC} \frac{1}{1 - \mu'^2},$$

et, par conséquent,

$$x'^2 x_1'^2 = \frac{c^2}{1 + \mu^2 \mu'^2 - \mu^2 - \mu'^2},$$

où $\nu = -\frac{4(A-C)u_0}{B^2 - 4AC}$. Mais la condition de la perpendicularité de deux axes nous donne

$$1 + \mu\mu' - (\mu - \mu') \cos \theta = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\mu^2 + \mu'^2 = \frac{1 + 2 \sin^2 \theta \mu\mu' + \mu^2 \mu'^2}{\cos^2 \theta},$$

et l'on trouvera ensuite

$$1 + \mu^2 \mu'^2 - \mu^2 - \mu'^2 = (1 + \mu\mu')^2 \tan^2 \theta.$$

On aura donc

$$x'^2 x_1'^2 = c^2 (1 + \mu\mu')^2 \tan^2 \theta,$$

d'où l'on conclut que, des deux valeurs x'^2 et $x_1'^2$, l'une est positive et l'autre négative. Si les axes de coordonnées étaient rectangulaires, on tirerait la même conclusion de ce que l'on aurait dans ce cas

$$x'^2 x_1'^2 = -\frac{c^2}{(\mu + \mu')^2}.$$

On voit par cela que l'on aura deux valeurs réelles égales et de signes contraires pour x' et de même pour y' , et que les deux autres valeurs de x' et de y' seront imaginaires. Ainsi, *dans les courbes du second degré ayant un centre, il n'y aura que deux foyers réels se trouvant sur un axe de la courbe et disposés symétriquement par rapport au centre.*

Dans le cas de la parabole, il est très facile de voir que chacune des équations (15) se réduit à une équation du premier degré par rapport aux coordonnées x_1 et y_1 .

Ces deux équations, ou l'une d'elles combinée avec l'équation de l'axe (17), nous donneront les coordonnées du foyer. Nous n'effectuerons pas ces calculs, qui sont d'ailleurs développés partout.

9. Il nous sera facile maintenant de manifester les propriétés principales des rayons vecteurs menés de deux foyers d'une ellipse ou d'une hyperbole à un point quelconque de la courbe.

Considérons d'abord une ellipse. Soient O son centre, F_1 et F_2 ses deux foyers; la droite qui les joint est l'axe focal. Dans ce cas le centre de la courbe se trouve, comme on sait, dans la partie intérieure du plan de la courbe, de même que les deux foyers F_1 et F_2 . La directrice correspondante au foyer F_1 , étant la polaire de ce point, se trouve tout entière dans la partie extérieure du plan de la courbe, et elle est perpendiculaire à l'axe focal. La directrice correspondante à l'autre foyer aura une situation analogue par rapport à ce foyer, et elle sera symétriquement placée avec la première directrice par rapport au centre de la courbe. Soit $M(x, y)$ un point quelconque de la courbe; on aura, d'après la formule (15),

$$F_1 M = \rho_1 = \lambda_1 [X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1],$$

ou

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{X_1^2 - 4Au_1}}.$$

La même formule nous donne, pour l'autre rayon vecteur, l'expression

$$F_2 M = \rho_2 = \lambda_2 [X_2(x - x_2) + Y_2(y - y_2) + 2u_2],$$

où x_2 et y_2 sont les coordonnées du foyer F_2 , et λ_2 , X_2 , Y_2 , u_2 désignent ce que deviennent λ_1 , X_1 , Y_1 , u_1 quand on change, dans ces expressions, x_1 et y_1 en x_2 et y_2 .

L'équation de la directrice correspondante au foyer F_1 est

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1 = 0.$$

Pour $x = x_1$ et $y = y_1$, le premier membre de cette équation se réduit à $2u_1$; mais, comme un point quelconque M de la courbe est situé, il est évident, du même côté de la directrice que le foyer F_1 , nous devons conclure que l'expression

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1$$

pour tous les points de la courbe aura le même signe que u_1 , et, par conséquent, dans l'expression donnée plus haut pour le rayon vecteur ρ_1 , le signe de λ_1 doit être le même que le signe de u_1 . Des considérations analogues nous amènent à conclure que, dans l'expression du rayon vecteur ρ_2 , le facteur λ_2 doit être pris avec le même signe que u_2 . D'ailleurs, comme on a

$$\begin{aligned} x_1 &= x - x', & y_1 &= \beta + y', \\ x_2 &= x - x', & y_2 &= \beta - y', \\ u_1 &= f(x - x', \beta + y') = u_0 + Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2, \\ u_2 &= f(x - x', \beta - y') = u_0 - Ax'^2 + Bx'y' - Cy'^2, \end{aligned}$$

nous aurons $u_1 = u_2$, et les facteurs λ_1 et λ_2 , dans les expressions de ρ_1 et de ρ_2 , auront le même signe. D'un autre côté, on aura

$$\begin{aligned} X_2 &= (2Ax' - By') = -X_1, \\ Y_2 &= (Bx' + 2Cy') = Y_1, \end{aligned}$$

d'où il suit que $\lambda_1 = \lambda_2$. Par conséquent, en ajoutant les deux expressions de ρ_1 et de ρ_2 , on trouvera

$$\rho_1 + \rho_2 = 2\lambda_1 = X_1x' + Y_1y' + 2u_1.$$

Mais, d'après un calcul immédiat, on a

$$X_1x' + Y_1y' + 2u_1 = 2u_0,$$

et enfin

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{4u_0}{\sqrt{X_1^2 - 4Au_1}} = \text{const.}$$

Cette égalité, exprimant la propriété fondamentale des rayons vecteurs menés de deux foyers d'une ellipse à un point quelconque de la courbe, nous donne aussi la longueur de l'axe focal de l'ellipse.

Passons à l'hyperbole. Dans ce cas, le centre de la courbe est situé, comme on sait, dans la partie du plan extérieure à la courbe, les foyers se trouvant toujours dans la partie intérieure; d'ailleurs, l'axe focal est l'axe transverse de la courbe. Le centre et le foyer se trouvent ici de deux côtés différents de la directrice correspondante au foyer considéré. En effet, si nous prenons l'équation de la directrice correspondante au foyer F_1 ,

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1 = 0;$$

alors la substitution des coordonnées du foyer x_1 et y_1 , au lieu de x et de y , dans le premier membre de cette équation, nous donne $-2u_1$, tandis que si nous mettons, au lieu de x et de y , les coordonnées du centre α et β , nous verrons que le premier membre de cette équation se réduit à

$$X_1(\alpha - x_1) + Y_1(\beta - y_1) + 2u_1 = 2u_0;$$

mais, dans le cas de l'hyperbole, u_1 et u_0 ont des signes différents.

Les valeurs des rayons vecteurs menés de deux foyers F_1 et F_2 , au point $M(x, y)$ de la courbe, seront ici

$$\begin{aligned} F_1M = \rho_1 &= \lambda_1 [X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) - 2u_1], \\ F_2M = \rho_2 &= \lambda_2 [X_2(x - x_2) + Y_2(y - y_2) + 2u_2]. \end{aligned}$$

Si le point M est pris sur la branche de la courbe voisine du foyer F_1 , alors il est évident que les deux points

M et F_1 se trouvent d'un même côté de la directrice correspondante au foyer F_1 , et par conséquent le facteur λ_1 aura le même signe que u_1 . Au contraire, le point M et le foyer F_2 se trouveront évidemment de deux côtés différents de la directrice correspondante au foyer F_1 , et, par conséquent, λ_2 et u_2 ont des signes contraires. Mais ici, comme dans le cas de l'ellipse, on aura

$$\lambda_2 = -\lambda_1, \quad Y_2 = -Y_1, \quad u_2 = -u_1, \quad \lambda_2 = -\lambda_1.$$

Donc

$$\rho_2 = \lambda_1 [X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) - 2u_1].$$

En prenant la différence des deux expressions de ρ_1 et de ρ_2 , nous trouverons

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{4u_0}{\sqrt{\lambda_1^2 - 4Au_1}} = \text{const.},$$

où le radical aura le signe opposé au signe de u_0 .

La dernière égalité, exprimant la propriété fondamentale des rayons vecteurs menés des deux foyers de l'hyperbole à un point quelconque de la courbe, nous donne aussi la longueur de l'axe focal.

10. Pour conclusion, nous donnerons une formule très simple, qui peut servir à calculer l'excentricité de la courbe.

Supposons que l'axe focal coupe la courbe en deux points (sommets) A_1 et A_2 , dont le premier est situé entre le foyer F_1 et le point D d'intersection de l'axe focal et de la directrice correspondante au foyer F_1 . En posant $A_1F_1 = f$ et $A_1D = d$, nous aurons

$$P = \varepsilon(f + d),$$

où P est le demi-paramètre. La même condition $\rho = \varepsilon \delta$, appliquée au point A_2 , nous donnera

$$2a - f = \varepsilon(2a + f).$$

où $2a = A_1A_2$ est la longueur de l'axe focal. Remarquons, d'ailleurs, que l'on a

$$f = \varepsilon d.$$

En éliminant ensuite f et d entre ces trois équations, nous trouverons

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{p^2}{a^2}.$$

Mais nous avons vu plus haut que, pour l'ellipse et pour l'hyperbole, on a la même expression de la longueur du demi-axe focal, savoir

$$a = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda_1 u_1}}{2u_0}.$$

Par conséquent, en vertu de la formule (16), nous aurons

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{u_1}{u_0}.$$

D'après cette formule, nous pouvons calculer la valeur de l'excentricité ε en fonction des coordonnées x_1 et y_1 d'un foyer F_1 .

Pour une ellipse, les valeurs u_1 et u_0 ont le même signe et, par suite, ε est moindre que l'unité; pour une hyperbole, au contraire, ces deux valeurs ont des signes différents et, par conséquent, ε est plus grand que l'unité.

Dans le cas de la parabole, les coordonnées du centre sont infinies et, par suite, on a $u_0 = \infty$ et l'excentricité $\varepsilon = 1$.

Du reste, la valeur de l'excentricité pour une parabole résulte directement de ce que, le second point d'intersection de l'axe focal et de la courbe étant éloigné à l'infini, son conjugué harmonique A_1 doit se trouver au milieu de la distance F_1D ; donc $A_1F_1 = A_1D$ ou $f = d$, et, par suite, $\varepsilon = 1$. Pour tous les points de la parabole on aura donc $\rho = \delta$.