

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 265-275

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__265_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

*Extrait d'une Lettre de M. Haillecourt,
inspecteur honoraire de l'Université.*

Le principe invoqué par M. Barbarin, dans sa *Note sur le planimètre polaire* (voir 2^e série, t. XIX, p. 212), pourrait s'énoncer ainsi (voir la figure) :

Pourvu que $B'A' = BA$, B et B' étant sur une même circonférence qui a C pour centre, l'angle ACA' est invariable.

Pour s'assurer de la fausseté de ce prétendu principe, il n'est nécessaire que d'examiner un des nombreux cas

particuliers qui se présentent; prenons-en deux seulement.

1° Soient A et A' à l'infini; ACA', égal à l'angle de B'A' avec BA, serait égal à BCB', ce qui est impossible, puisque B'A' peut tourner autour de B', sans que ni B ni A soient déplacés;

2° Si Γ est une circonférence ayant B pour centre, B' se confond avec B, B'CB = 0; mais A'CA $\gtrsim$ 0, sauf pour le cas où CA est tangent à Γ ⁽¹⁾.

Reste à expliquer comment, en partant d'un principe faux, l'auteur peut arriver à la démonstration des formules (7) et (8), qui sont exactes.

Réponse de M. Barbarin.

Je reconnais pleinement la justesse des critiques de M. Hailecourt, et il suffit en effet de jeter les yeux sur la *fig. 1* de mon Article pour reconnaître que le déplacement fini de la figure de *forme variable* ABC ne peut être assimilé à une simple rotation autour du point fixe C, ce qui serait vrai si la figure avait une *forme invariable*.

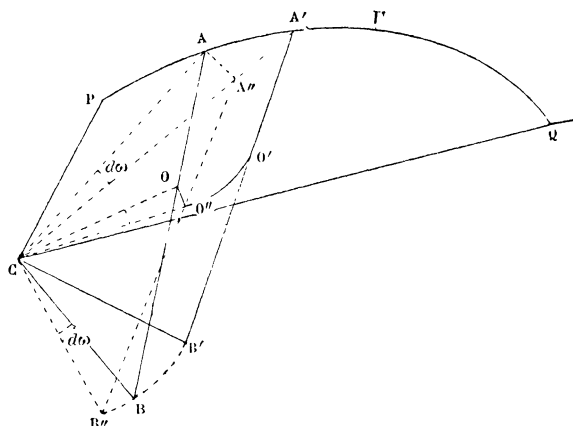
Toutefois, on peut voir que, au point de vue des indications du planimètre, tout se passe en effet comme si cette rotation seule existait. Je me permets donc de vous donner ci-après la nouvelle rédaction d'après laquelle mon Article devrait être conçu, et vous prie, etc.

On peut passer de la position ABC du levier à la position infiniment voisine A'B'C par une rotation d'angle $\widehat{ACA''} = d\omega$ autour du point fixe C, suivie

(1) On suppose un mouvement infiniment petit.

d'une translation rectiligne $A''A'$ dans le sens du rayon vecteur CA' (*fig. 1*).

Fig. 1.



1° L'effet de la rotation est de faire tourner les rayons CA , CO , CB de l'angle $d\omega$; donc, en employant les mêmes notations que dans mon précédent Article (p. 212-215) et en désignant par dS l'arc de cercle OO'' , on a

$$\rho^2 \frac{d\omega}{2} = (a^2 + c^2 - b^2) \frac{d\omega}{2} + (a + b) dS \cos \widehat{COB};$$

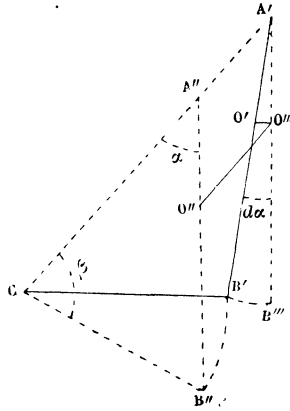
dans ce mouvement, la roulette a enregistré la quantité $dS \cos \widehat{COB} = du$, et l'on a

$$\rho^2 \frac{d\omega}{2} = (a^2 + c^2 - b^2) \frac{d\omega}{2} + (a + b) du.$$

2° Analysons maintenant l'effet de la translation du point A suivant $A''A'$. Ce mouvement peut lui-même être considéré (*fig. 2*) comme la résultante d'une translation

parallèle qui transporterait $A''B''$ en $A'B'''$, suivie d'une rotation autour de A' qui porte enfin $A'B'''$ suivant $A'B'$.

Fig. 2.



Dans la translation parallèle, le point O décrit la droite $O''O''' = A'A'$ et la roulette enregistre un nombre égal à $O''O''' \sin \widehat{O''O'''A''}$.

Dans la rotation, le point O''' décrit l'arc $O'''O'$ et la roulette indique un nombre qui est précisément la longueur de cet arc; donc l'indication totale de la roulette pour le passage de O'' en O' est la somme algébrique des quantités $O'''O'$ et $O''O''' \sin \widehat{O''O'''A''}$.

Désignons un instant par α l'angle $CA''B''$ et par β l'angle $A''CB''$; l'indication totale $d\nu$ de la roulette pour le passage de O'' en O' est donc

$$d\nu = A'A' \sin \alpha + a d\alpha,$$

$d\alpha$ étant l'angle $\widehat{B'A'B'}$. Mais

$$\rho = CA'' = b \cos \beta + (a + c) \cos \alpha;$$

donc

$$d\rho = A'A' = -b \sin \beta d\beta - (a + c) \sin \alpha d\alpha.$$

donc

$$dv = -b \sin \beta \sin \alpha d\beta - (a + c) \sin^2 \alpha d\alpha + a d\alpha,$$

enfin, dans le triangle $cB''A''$, on a

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a + c}{\sin \beta};$$

donc

$$dv = -\frac{b^2}{a + c} \sin^2 \beta d\beta - (a + c) \sin^2 \alpha d\alpha + a d\alpha;$$

par conséquent, en définitive, l'indication de la roulette pour le déplacement élémentaire du point A au point A' est la somme algébrique $du + dv$. L'indication totale correspondant au secteur plan CPQ, balayé par le planimètre, est par conséquent

$$\int du + \int dv = U + V,$$

avec la relation

$$\text{aire CPQ} = (a^2 + c^2 - b^2) \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} + (a + b)U.$$

Admettons maintenant qu'on fasse décrire à la pointe A un contour *fermé* quelconque. Je dis que l'intégrale V est nulle. En effet

$$\begin{aligned} \int dv &= -\frac{b^2}{a + c} \int \sin^2 \beta d\beta \\ &\quad - (a + c) \int \sin^2 \alpha d\alpha + a \int d\alpha. \end{aligned}$$

Or

$$\int \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{4} \sin 2\alpha,$$

$$\int \sin^2 \beta d\beta = \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{4} \sin 2\beta,$$

donc

$$\begin{aligned} \int dv &= \frac{b^2}{a + c} \left(\frac{1}{4} \sin 2\beta - \frac{1}{2} \beta \right) \\ &\quad + (a + c) \left(\frac{1}{4} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \alpha \right) + a \alpha. \end{aligned}$$

Or, dans le triangle $CB''A'''$, la somme des deux angles α, β est toujours inférieure ou au plus égale à π . Donc ces deux angles oscillent nécessairement entre zéro et un maximum moindre que π ; il en résulte que, lorsque, après avoir décrit complètement le contour fermé, la pointe mobile A est revenue au point de départ, les angles α, β sont revenus à leurs valeurs initiales, et, par conséquent, l'intégrale définie V est nulle.

Du reste, dans l'appareil de M. Amsler, $CB'' = A''B''$; donc $\alpha = \beta$ et $b = a + c$. On a alors

$$\int d\omega = b \int_0^\pi \sin^2 \alpha - c \alpha,$$

et, α oscillant forcément entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on a encore $V = 0$.

Par conséquent, suivant que la pointe fixe C est à l'intérieur ou à l'extérieur du contour fermé, on a

$$S = (a^2 + c^2 - b^2)\pi + (a + b)U$$

ou

$$S = (a + b)U.$$

Pour répondre maintenant aux objections de M. Hailcourt, il suffit de dire :

1° Que si Γ est une circonférence ayant B pour centre, $\widehat{ACA'}$ vaut $\widehat{BCB''}$ et non $\widehat{BCB'}$, qui est nul en effet, la rotation $d\omega$ ayant pour résultat d'amener B en B'' et la translation $A''A'$ ramenant B'' en B .

2° Si A et A' sont à l'infini (nous sortons ici de l'emploi pratique du planimètre), comme ils sont du reste sur le même rayon vecteur parallèle à l'asymptote de la courbe Γ , la rotation $d\omega$ n'existe plus, et l'angle BCB'' est nul, ainsi que $\widehat{ACA'}$. Quant à l'angle BCB' , il est indéterminé, la ligne $B'A'$ n'étant plus assujettie qu'à être parallèle à l'asymptote et le point B' pouvant être pris en un point quelconque de la circonférence CB .

3° Les calculs faits plus haut expliquent comment, en partant d'un principe faux, j'ai pu arriver à un résultat exact, puisque, en appliquant ce principe, j'étais conduit à négliger des quantités que l'application du principe vrai fait considérer, mais dont l'ensemble est sans influence sur le résultat final. Ce dernier, dès lors, doit être le même dans les deux cas.

Extrait d'une lettre de M. V. Jamet.

En 1874, je crois, M. Painvin avait proposé, dans les *Nouvelles Annales*, de démontrer que les quatre hauteurs d'un tétraèdre sont sur un même hyperboloïde. La démonstration de ce théorème se trouve dans plusieurs Ouvrages, notamment dans la traduction allemande de l'Ouvrage de M. Salmon. Voici cependant une démonstration qui, je crois, n'a été publiée nulle part. Vous voudrez bien l'insérer, si vous jugez qu'elle puisse intéresser vos lecteurs.

Je m'appuierai sur le théorème suivant :

Si quatre forces se font équilibre, elles sont situées sur un même hyperboloïde ⁽¹⁾.

En effet, la somme de leurs moments par rapport à une droite quelconque doit être nulle. Si l'on considère, en particulier, une droite qui rencontre trois des forces considérées, comme les moments de ces trois forces par rapport à cette droite sont nuls, le moment de la quatrième est nul aussi, et par suite la droite rencontre la quatrième force. Ainsi toute droite qui rencontre les trois premières forces rencontre la quatrième :

(¹) Proposé comme exercice dans l'Ouvrage de M. Garcet

c'est dire que les quatre forces sont sur un même hyperboloïde.

Cela posé, j'aurai démontré le théorème si je fais voir que *quatre forces dirigées suivant les quatre hauteurs d'un tétraèdre et proportionnelles aux faces opposées se font équilibre*. Or, si l'on projette les quatre faces d'un tétraèdre sur un plan, et qu'on donne à la projection d'une des faces le même signe qu'au cosinus de l'angle que fait une même direction, prise sur une droite perpendiculaire au plan de projection, avec la direction de la hauteur correspondante qui va, par exemple, du sommet du tétraèdre à cette face, on voit que la somme algébrique de ces projections est nulle. Or cette somme est, à un facteur près, la somme des projections des forces considérées sur l'axe du plan de projection. Donc la somme des projections des quatre forces sur un axe quelconque est nulle.

Il en résulte que, si l'on construit, par la méthode de Poinso, la résultante générale et le couple résultant des forces considérées, on trouvera que la résultante générale est nulle.

Je dis que le moment du couple résultant est aussi nul. En effet, soit ABCD le tétraèdre. La somme des moments, par rapport à l'arête AB, des deux hauteurs issues des sommets A et B est évidemment nulle. Si l'on désigne par S_1 l'aire de la face ABC, par α l'angle dièdre des deux plans ABC, ABD, par h_1 la hauteur issue du sommet D, le moment, par rapport à AB, de la force dirigée suivant cette hauteur est, au signe près, $KS_1h_1 \cot \alpha$. Le moment de la force issue du sommet C est, encore au signe près, $KS_2h_2 \cot \alpha$, S_2 désignant l'aire de la face ABD, h_2 la hauteur correspondante.

Si maintenant l'on remarque que ces deux moments sont de signes contraires et que $S_1h_1 = S_2h_2$, il en résulte que

la somme des moments des quatre forces par rapport à AB est nulle; il en est de même de la somme des moments des forces par rapport à AC et à BC.

Si donc l'axe du couple résultant n'est pas nul, il doit être dirigé perpendiculairement à la face ABC; mais il doit aussi être perpendiculaire aux trois autres faces du tétraèdre, ce qui est impossible. Il faut donc admettre qu'il est nul.

Remarque. — Le théorème que je viens de démontrer peut encore servir à démontrer le suivant, qu'on donne souvent comme exercice de Mécanique :

Si, aux centres de gravité des faces d'un tétraèdre, on applique quatre forces perpendiculaires à ces faces et proportionnelles à leurs aires, elles se font équilibre.

En effet, les centres de gravité des faces d'un tétraèdre sont les sommets d'un second tétraèdre homothétique au premier par rapport à son centre de gravité.

Extrait d'une Lettre de M. Gambey.

Permettez-moi d'attirer l'attention de vos lecteurs sur un mode de description des courbes du second ordre qui me semble peu connu.

Soient deux droites rectangulaires indéfinies HI, KL, qui se coupent en P. Prenons deux points fixes A et B sur la première et un point quelconque C sur la seconde. Traçons AC et BC : élevons en A une perpendiculaire sur AC qui coupe BC en M, et sur BC, au point B, une autre perpendiculaire qui coupe CA prolongée en M' : si le point C décrit la droite KL, les points M et M' décrivent deux coniques de même espèce. Cette espèce dépend des positions relatives des points A, B et P.

Supposons d'abord le point P en dehors du segment AB et à gauche de A. Les deux coniques sont alors des ellipses ayant la droite AB pour axe commun. Les foyers de la première sont sur AB; ceux de la seconde sur une perpendiculaire à AB. Elles sont inégales, mais elles ont la même excentricité $\sqrt{\frac{AB}{BP}}$. Si l'on pose $AB = 2a$, et qu'on appelle $2b$, $2b'$ les longueurs des axes dirigés selon la perpendiculaire à AB, $2c$ et $2c'$ les distances focales, on a les relations

$$bb' = a^2, \quad \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c'^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Si le point P s'éloigne indéfiniment de A, l'excentricité tend vers zéro, et les deux coniques tendent à se confondre en un cercle qui a pour diamètre AB. En effet, pour $AP = \infty$, les deux droites AC et BC sont parallèles, et AM est perpendiculaire sur BC.

Supposons maintenant le point P entre A et B. Les deux coniques sont alors des hyperboles ayant le même axe focal AB. L'excentricité de la première est $\sqrt{\frac{AB}{BP}}$, celle de la seconde $\sqrt{\frac{AB}{AP}}$. Ces rapports sont égaux quand le point P est situé au milieu de AB, et les deux hyperboles se confondent en une seule qui est équilatère. Quand le point P parcourt le segment AB, on obtient donc deux fois toutes les hyperboles qui ont leurs sommets réels en A et B.

Le cercle décrit sur AB comme diamètre coupe KI en deux points C_1 et C_2 ; les droites BC_1 , BC_2 donnent les directions des asymptotes de la première hyperbole, et les droites AC_1 , AC_2 celles des asymptotes de la seconde.

Si l'on appelle encore $2b\sqrt{-1}$, $2b'\sqrt{-1}$ les axes

imaginaires et $2c$, $2c'$ les distances focales, on a les relations

$$bb' = a^2, \quad \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c'^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Supposons enfin que le point B s'éloigne indéfiniment du point A, qui reste fixe, ainsi que le point P.

L'excentricité $\sqrt{\frac{AB}{BP}}$ tend vers 1, et l'ellipse et l'hyperbole lieux des points M tendent toutes deux à se confondre en une parabole unique, dont le sommet est en A et dont l'axe est sur AB. Si l'on fait $AB = \infty$, et qu'on pose $AP = 2p$, l'équation de la parabole sera $y^2 = \pm 2px$, suivant que le point P sera à gauche ou à droite du point A. Dans ce cas, le point M est l'intersection de la perpendiculaire élevée en A sur AC et d'une parallèle à la droite HI menée par le point C.

Ainsi, quelle que soit l'espèce de la conique à décrire, la construction reste la même.

P. S. — Ce qui précède m'a été suggéré par l'examen d'un cas particulier de la question suivante :

Soient pris deux points fixes A et B sur une ellipse. On trace par A une sécante quelconque qui coupe de nouveau l'ellipse en C, on trace BC et l'on élève en B une perpendiculaire sur BC. Cette perpendiculaire coupe AC en M : lieu de M ?

On trouve, dans le cas général, une équation du quatrième degré, décomposable en trois facteurs, dont deux représentent la droite AB et la perpendiculaire à cette droite au point B, et l'autre une conique.

Le cas particulier est celui où les deux points A et B sont aux extrémités d'un axe. Alors la conique elle-même se change en une droite perpendiculaire sur AB.