

MORET-BLANC

**Questions d'analyse indéterminée proposées
par M. Édouard Lucas**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 201-213

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20_201_1>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20_201_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS D'ANALYSE INDETERMINÉE PROPOSÉES
PAR M. EDOUARD LUCAS;

(voir 2^e série, t. XIV, p. 176),

PAR M. MORET-BLANC.

1. Si (x, y, z) représente une solution en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$(1) \quad Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxyz = 0.$$

(¹) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XIX, p. 115 (mars 1880).

on obtient une nouvelle solution à l'aide des équations

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0$$

$$AXx^2 + BYy^2 + CZz^2 = 0.$$

De ces deux dernières équations on tire

$$\frac{X}{x(Cz^3 - By^3)} = \frac{Y}{y(Ax^3 - Cz^3)} = \frac{Z}{z(By^3 - Ax^3)} = h$$

h étant un nombre quelconque.

En remplaçant X, Y, Z par les valeurs déduites de ces relations dans l'équation

$$AX^3 + BY^3 + CZ^3 + 3DXYZ = 0,$$

on obtient l'équation

$$Ax^3(Cz^3 - By^3)^3 + By^3(Ax^3 - Cz^3)^3 + Cz^3(By^3 - Ax^3)^3 \\ + 3Dxyz(Cz^3 - By^3)(Ax^3 - Cz^3)(By^3 - Ax^3) = 0$$

qui doit être satisfaite en vertu de l'équation (1).

En effet, si l'on élimine D entre ces deux équations, on obtient l'identité

$$(Ax^6 + By^6 + Cz^6 - BCy^3z^3 - ACx^3z^3 - ABx^3y^3) \\ \times [Ax^3(Cz^3 - By^3) + By^3(Ax^3 - Cz^3) + Cz^3(By^3 - Ax^3)] = 0,$$

car le dernier facteur est identiquement nul

2. Si $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1)$ désignent deux solutions distinctes de l'équation précédente, on obtient une nouvelle solution à l'aide des équations

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$AXxx_1 + BYyy_1 + CZzz_1 = 0$$

De ces deux dernières équations, on tire

$$\begin{aligned} & \frac{X}{C(z^2 x_1 z_1 - z_1^2 x z) + B(y^2 x_1 y_1 - x_1 y y_1^2)} \\ &= \frac{Y}{A(x^2 x_1 y_1 - x_1^2 x y) + C(z^2 y_1 z_1 - z_1^2 y z)} \\ &= \frac{Z}{B(y^2 y_1 z_1 - z_1^2 y z) + A(x^2 x_1 z_1 - x_1^2 x z)} = k. \end{aligned}$$

Si entre les équations

$$\begin{aligned} A x^3 + B y^3 + C z^3 + 3 D x y z &= 0, \\ A X^3 + B Y^3 + C Z^3 + 3 D X Y Z &= 0, \\ A x_1^3 + B y_1^3 + C z_1^3 + 3 D x_1 y_1 z_1 &= 0, \end{aligned}$$

on élimine D, on a les deux équations

$$\begin{aligned} A(x^3 x_1 y_1 z_1 - x_1^3 x y z) + B(y^3 x_1 y_1 z_1 - y_1^3 x y z) \\ + C(z^3 x_1 y_1 z_1 - z_1^3 x y z) &= 0, \\ A(x^3 X Y Z - X^3 x y z) + B(y^3 X Y Z - Y^3 x y z) \\ + C(z^3 X Y Z - Z^3 x y z) &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on élimine un des coefficients entre ces deux dernières équations, après avoir remplacé dans la dernière X, Y, Z par les valeurs trouvées plus haut, on obtient une identité; donc l'équation

$$A X^3 + B Y^3 + C Z^3 + 3 D X Y Z = 0$$

est une conséquence des autres.

3. *L'équation biquadratique $x^4 - 5y^4 = 1$ a pour solution en nombres entiers $x = 3$, $y = 2$, et n'en a pas d'autre.*

Il est évident que y doit être pair et x impair.

Je rappellerai d'abord que tout carré impair est égal à huit fois un nombre triangulaire plus 1. Dans ce qui suit, la lettre t désignera toujours un nombre triangulaire.

Cela posé, l'équation peut s'écrire

$$(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 5\gamma^4. \quad .$$

Les deux facteurs $x^2 + 1$ et $x^2 - 1$ ayant pour plus grand commun diviseur 2, et $x^2 + 1$ étant de la forme $8m + 2$, il faut que le premier soit le décuple ou le double d'un carré impair, et le second le double ou le décuple d'un carré pair.

1° Soient

$$x^2 + 1 = 10u^2 = 10(8t + 1) = 80t + 10,$$

$$x^2 - 1 = 2v^2 = 2.4^n(8t' + 1) = 4^n.16t' + 2.4^n,$$

d'où

$$x^2 = 80t + 9 = 4^n.16t' + 2.4^n + 1.$$

La comparaison de ces valeurs montre que l'on doit avoir $n = 1$, d'où

$$x^2 = 80t + 9 = 64t' + 9.$$

$x^2 - 1$ est un multiple de 8 par un nombre impair; les deux facteurs $x + 1$ et $x - 1$ seront donc l'un le double, l'autre le quadruple d'un carré impair. Soient

$$x + 1 = 4(8t'' + 1) = 32t'' + 4,$$

$$x - 1 = 2(8t''' + 1) = 16t''' + 2,$$

d'où

$$x = 32t'' + 3 = 16t''' + 3.$$

Il faut qu'on ait $2t'' = t'''$, ce qui ne peut avoir lieu, comme je l'ai démontré (question 1180), qu'en faisant $t'' = 0$, $t''' = 0$, d'où $x = 3$, $\gamma = 2$, solution admissible avec $t = 0$, $t' = 0$; ou bien $t'' = 3$, $t''' = 6$, d'où $x = 99$, ce qui donne pour t' une valeur fractionnaire : cette solution est donc inadmissible.

Si l'on posait

$$x + 1 = 2(8t_1 + 1) = 16t_1 + 2,$$

$$x - 1 = 4(8t_2 + 1) = 32t_2 + 4,$$

il en résulterait

$$x = 16t_1 + 1 = 32t_2 + 5,$$

valeurs incompatibles.

2° Posons maintenant

$$x^2 + 1 = 2(8t + 1) = 16t + 2,$$

$$x^2 - 1 = 10 \cdot 4^n (8t' + 1).$$

De la première équation, on tire

$$x^2 = 16t + 1 = 8t'' + 1,$$

ce qui exige que $t'' = 2t$, et, par suite, $t = 0$, $t'' = 0$, $x = 1$, $y = 0$, solution admissible; ou bien $t = 3$, $t'' = 6$, ce qui donne $x^2 = 49$, valeur qui ne satisfait pas à la seconde équation.

Les seules solutions en nombres entiers positifs sont donc

$$x = 1, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad x = 3, \quad y = 2.$$

4. *La différence de deux cubes consécutifs n'est jamais égale à un bicarré.*

De l'équation

$$3x^2 + 3x + 1 = z^4$$

on tire

$$x = -\frac{3 \pm \sqrt{3(4z^4 - 1)}}{6}.$$

Il faudrait donc que $4z^4 - 1$ fût le triple d'un carré, et l'on aurait, en remarquant que z^2 est de la forme $3m + 1$,

$$2z^2 + 1 = 3u^2 = 3(8t + 1) = 24t + 3,$$

$$2z^2 - 1 = v^2 = 8t' + 1,$$

d'où

$$z^2 = 12t + 1 = 4t' + 1 = 8t'' + 1,$$

ce qui exige que l'on ait

$$t' = 0, \quad t'' = 0, \quad t = 0,$$

d'où

$$z = 1, \quad r = 0;$$

$t' = 6$, $t'' = 3$ donnerait $t = 2$, inadmissible, puisque 2 n'est pas un nombre triangulaire.

Donc la différence des cubes de deux nombres entiers consécutifs n'est jamais un bicarré, à moins que l'un d'eux ne soit 0.

§. *Trouver toutes les solutions en nombres entiers des deux progressions arithmétiques*

$$: x^2, 2y^2, 3z^2, 4u^2,$$

$$: x^2, 3y^2, 5z^2, 7u^2.$$

On a pour la première

$$: 167^2, 2 \times 97^2, 3 \times 57^2, 4 \times 13^2,$$

de raison 9071, et pour la seconde

$$: 607^2, 3 \times 303^2, 5 \times 191^2, 7 \times 113^2,$$

de raison 93022.

Il suffit de chercher les solutions en nombres premiers entre eux, car si l'on multiplie x, y, z, u par un même nombre m , la raison sera multipliée par m^2 .

On reconnaît immédiatement que les quatre carrés doivent être à la fois pairs ou impairs, pour que la raison soit de même forme relativement au diviseur 8, et, comme on veut des nombres premiers entre eux, ils doivent être impairs.

1° On doit avoir

$$x^2 + 3z^2 = 4y^2,$$

$$x^2 + 3z^2 = (x + z\sqrt{-3})(x - z\sqrt{-3}),$$

et, comme x et z doivent être premiers entre eux, chaque

facteur doit être un carré. Soit donc

$$x + z\sqrt{-3} = (p + q\sqrt{-3})^2,$$

d'où

$$x - z\sqrt{-3} = (p - q\sqrt{-3})^2,$$

et

$$x^2 + 3z^2 = (p^2 + 3q^2)^2.$$

On en tire

$$x = p^2 - 3q^2,$$

$$z = 2pq,$$

$$y = p^2 + 3q^2.$$

Comme les nombres x, y, z doivent être impairs, on peut poser

$$p = m\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$x = \frac{m^2 - 3n^2}{2}, \quad y = \frac{m^2 + 3n^2}{4}, \quad z = mn.$$

On peut encore poser

$$p = m\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{6}},$$

d'où

$$x = \frac{3m^2 - n^2}{2}, \quad y = \frac{3m^2 + n^2}{4}, \quad z = mn;$$

mais, comme le signe de x est arbitraire, les nouvelles formules rentrent dans les premières.

On a ensuite

$$4u^2 - 6z^2 - 2v^2 = \frac{84m^2n^2 - 2m^4 - 18n^4}{16}.$$

Il faut donc que $84m^2n^2 - 2m^4 - 18n^4$ soit un carré parfait, ou, en posant $\frac{m}{n} = v$, $84v^2 - 2v^4 - 18$ doit être un carré rationnel.

Soient h une solution, k^2 le résultat de sa substitution dans le trinôme; posons $v = h + r$:

$$84v^2 - 2v^4 - 18 = k^2 + (168h - 8h^3)r + (84 - 7h^2)r^2 - 8hr^3 - 2r^4 = t^2.$$

Or l'équation $84v^2 - 2v^4 - 18 = t^2$ est satisfaite par $v = 1$, $t = 8$, d'où $m = 1$, $n = 1$, $x = y = z = u = 1$.

Faisons $h = 1$, $k = 8$, et posons

$$\begin{aligned} 64 + 160r + 72r^2 - 8r^3 - 2r^4 \\ &= (8 + ar + b)^2 \\ &= 64 + 16ar + (a^2 + 16b)r^2 + 2abr^3 + b^2r^4. \end{aligned}$$

Identifiant les premiers termes, on a

$$a = 10, \quad b = -\frac{7}{4},$$

d'où

$$\begin{aligned} r &= \frac{16}{3}, \quad v = \frac{19}{3}, \quad m = 19, \quad n = 3, \\ x &= 167, \quad y = 97, \quad z = 57, \quad u = 13. \end{aligned}$$

Faisons maintenant $h = \frac{19}{3}$, d'où $k = \frac{104}{9}$, et posons

$$\begin{aligned} \left(\frac{104}{9}\right)^2 - \frac{26144}{27}r - \frac{3576}{9}r^2 - \frac{152}{3}r^3 - 2r^4 \\ &= \left(\frac{104}{9} + ar + br^2\right)^2 \\ &= \left(\frac{104}{9}\right)^2 + \frac{208}{9}ar + \left(a^2 + \frac{208}{9}b\right)r^2 + 2abr^3 + b^2r^4. \end{aligned}$$

En identifiant les premiers termes, on a

$$a = -\frac{1634}{3 \times 13}, \quad b = -\frac{818575}{4 \times 13^3},$$

(209)

puis

$$r = - \frac{307.781 \times 13^2 \times 16}{919.368297},$$

$$r' = \frac{19}{3} - \frac{307781 \times 13^2 \times 16}{919368297} = \frac{4990426057}{919368297},$$

$$m = 4\ 990\ 426\ 057, \quad n = 919\ 368\ 297,$$

$$x = 11\ 184\ 319\ 016\ 899\ 263\ 311,$$

$$y = 6\ 860\ 016\ 606\ 742\ 651\ 969,$$

$$z = 4\ 588\ 039\ 505\ 328\ 514\ 929,$$

$$u = 2\ 836\ 414\ 255\ 938\ 331\ 991 \left[u = \frac{1}{8} \left(\frac{104}{9} + ar + br^2 \right) \right].$$

Partant de ces valeurs, on en trouvera d'autres par la même méthode, et ainsi de suite; mais les nombres croissent rapidement et les calculs deviennent très longs.

2° Considérons la progression : $x^2.3y^2.5z^2.7u^2$.

On a

$$x^2 + 5z^2 = 6y^2$$

ou

$$6y^2 - 5z^2 = x^2,$$

qu'on peut écrire

$$(6y - 5z)^2 - 30(y - z)^2 = x^2$$

ou

$$[6y - 5z + (y - z)\sqrt{30}][6y - 5z - (y - z)\sqrt{30}] = x^2.$$

Les deux facteurs devant être premiers entre eux, et par conséquent carrés, posons

$$6y - 5z + (y - z)\sqrt{30} = (p + q\sqrt{30})^2,$$

d'où

$$6y - 5z - (y - z)\sqrt{30} = (p - q\sqrt{30})^2$$

et

$$(6y - 5z)^2 - 30(y - z)^2 = (p^2 - 30q^2)^2.$$

De la première équation l'on tire

$$6x - 5z = p^2 + 30q^2, \quad y - z = 2pq,$$

d'où

$$(1) \quad \begin{cases} x = p^2 + 30q^2, \\ y = p^2 + 30q^2 + 10pq, \\ z = p^2 + 30q^2 + 12pq. \end{cases}$$

Il n'est pas nécessaire que p et q soient entiers pour que x , y et z le soient. On peut poser

$$p = m\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$(2) \quad \begin{cases} x = 2m^2 + 15n^2, \\ y = 2m^2 + 15n^2 + 10mn, \\ z = 2m^2 + 15n^2 + 12mn; \end{cases}$$

ou

$$p = m\sqrt{3}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{3}},$$

d'où

$$(3) \quad \begin{cases} x = 3m^2 + 10n^2, \\ y = 3m^2 + 10n^2 + 10mn, \\ z = 3m^2 + 10n^2 + 12mn; \end{cases}$$

ou

$$p = m\sqrt{5}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{5}},$$

d'où

$$(4) \quad \begin{cases} x = 5m^2 + 6n^2, \\ y = 5m^2 + 6n^2 + 10mn, \\ z = 5m^2 + 6n^2 + 12mn. \end{cases}$$

On pourrait poser encore

$$p = m\sqrt{15}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{15}}, \quad \dots;$$

mais les nouvelles formules rentrent dans les premières, les signes de x, y, z étant arbitraires.

Il faut maintenant faire entrer $7u^2$ dans la progression. On a, en employant les formules (1),

$$\begin{aligned} 7u^2 &= 10z^2 - 3y^2 \\ &= 7p^4 - 180p^3q + 1560p^2q^2 - 5400pq^3 + 6300q^4, \end{aligned}$$

ou, en divisant par $7q^4$ et posant $\frac{p}{q} = v$,

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{q^4} &= v^4 - \frac{180}{7}v^3 + \frac{1560}{7}v^2 - \frac{5400}{7}v + 900 \\ &= (v^2 + av + 30)^2 - v^4 + 2av^3 + (a^2 + 60)v^2 + 60av + 900, \end{aligned}$$

d'où $v = 0$, en faisant $a = -\frac{90}{7}$, d'où

$$x - y = z - u - 1.$$

solution évidente *a priori*.

Posons encore

$$\begin{aligned} v^4 - \frac{180}{7}v^3 + \frac{1560}{7}v^2 - \frac{5400}{7}v + 900 \\ = (v^2 + av + b)^2 = v^4 + 2av^3 + (a^2 + 2b)v^2 + 2abv + b^2, \end{aligned}$$

d'où, en identifiant les premiers termes,

$$a = -\frac{90}{7}, \quad b = \frac{1410}{49},$$

puis

$$v = \frac{16}{7}, \quad p = 16, \quad q = 7,$$

$$x = 1214, \quad y = 606, \quad z = 382, \quad u = 226,$$

ou, en divisant par 2,

$$x = 607, \quad y = 303, \quad z = 191, \quad u = 113.$$

En posant

$$v^4 - \frac{180}{7}v^3 + \frac{1560}{7}v^2 - \frac{5400}{7}v + 900 = (av^2 + bv + 30)^2$$

et identifiant les derniers termes, on trouve

$$p = 105, \quad q = 8,$$

d'où

$$x = 9105, \quad y = 4545, \quad z = 2865, \quad u = 1695,$$

ou, en divisant par 15,

$$x = 607, \quad y = 303, \quad z = 191, \quad u = 113.$$

Les autres formes donnent de même des équimultiples des nombres 607, 303, 191, 113.

Mais, au moyen de cette solution, en opérant comme dans la progression précédente, on en trouvera une deuxième, celle-ci en fera trouver une troisième, et ainsi de suite indéfiniment.

6. *Trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles la somme des cinquièmes puissances des x premiers nombres est un carré parfait.*

En appelant S_5 cette somme, on a

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{x^2(x+1)^2[(2x+1)^2-3]}{24} \\ &= \left[\frac{x(x+1)}{2} \right]^2 \left[\frac{(2x+1)^2-3}{6} \right]. \end{aligned}$$

Pour que S_5 soit un carré parfait, il faut et il suffit que $\frac{(2x+1)^2-3}{6}$ soit un carré parfait, ce qui exige d'abord que $2x+1$ soit un multiple de 3.

Posons donc $2x + 1 = 3u$; il faut qu'on ait

$$\frac{3u^2 - 1}{2} = v^2 \quad \text{ou} \quad 3u^2 - 2v^2 = 1,$$

équation qu'on peut écrire

$$(3u - 2v)^2 - 6(v - u)^2 = 1.$$

Les solutions de cette équation sont données par les réduites de rang impair dans le développement de $\sqrt{6}$ en fraction continue; ce sont

$3u - 2v = 1, 5, 49, 485, 4801, 47525, 470449, 4656965, \dots,$
 $v - u = 0, 2, 20, 198, 1960, 19042, 192060, 1901198, \dots,$
 d'où

$u = 1, 9, 89, 881, 8721, 86329, 854569, 8459361, \dots,$
 $v = 1, 11, 109, 1079, 10681, 105371, 1046629, 10360559, \dots,$
 $x = 1, 13, 133, 1321, 13081, 129493, 1281853, 12689041, \dots$

Si l'on appelle x_n le terme général de cette dernière suite, on a

$$x_n = 10x_{n-1} - x_{n-2} + 4,$$

$$v_n = 10v_{n-1} - v_{n-2}.$$

Note. — Reste à résoudre le n° 7.