NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Questions d'analyse indéterminée proposées par M. Édouard Lucas

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 150-160

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__150_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

QUESTIONS D'ANALYSE INDETERMINÉE PROPOSÉES PAR M. EDOUARD LUCAS;

(voir 2e série, t. XIV, p. 309),

PAR M. MORET-BLANC.

1. *Trouver tous les systèmes de deux nombres entiers dont le quotient par leur somme de la somme de leurs cinquièmes puissances est un carré parfait.*

Cette question, qui comprend comme cas particulier la question **1168**, *a pour solutions simples*

$$(3,\ 1,\ 11),\quad (8,\ 11,\ 101),$$
$$(123,\ 35,\ 13361),\quad (808,\ -627,\ 1169341).$$

Il faut trouver les solutions entières de l'équation

$$\frac{x^5+y^5}{x+y}=z^2$$

ou

$$(1)\qquad x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=z^2.$$

1° On ne doit pas regarder comme distinctes deux solutions qui ne diffèrent que par la permutation des valeurs de x et y.

2° Si $x=a$, $y=b$ est une solution, $x=ma$, $y=mb$ en sera aussi une, quel que soit le nombre entier m : il suffit donc de chercher les solutions en nombres premiers entre eux.

Si l'on divise par y^4 et que l'on pose $\frac{x}{y}=u$, l'équation (1) peut s'écrire

$$(2)\qquad u^4-u^3+u^2-u+1=\frac{z^2}{y^4}=t^2,$$

et l'on est ramené à trouver les solutions rationnelles de l'équation (2).

Or toute solution connue en fait découvrir d'autres par les procédés suivants, indiqués par Euler.

Soient h une solution de l'équation (2) et k^2 le résultat de sa substitution dans le premier membre de cette équation. Posons $u = v + h$; l'équation (2) devient, en développant,

$$v^4 + (4h - 1)v^3 - (6h^2 - 3h + 1)v^2 - (4h^3 - 3h^2 + 2h - 1)v + k^2 = t^2.$$

Désignons, pour abréger, le premier membre par V.

1° On pose

$$V = (v^2 + mv + k)^2,$$

et l'on détermine m de manière à faire disparaître soit le terme en v^3, soit le terme en v; divisant les termes restants par v ou v^2, on a une équation du premier degré pour déterminer v, ce qui fournit deux solutions.

2° On pose

$$V = (v^2 + mv - k)^2,$$

et l'on opère comme dans le cas précédent.

3° On pose

$$V = (v^2 + mv + n)^2,$$

et l'on détermine m et v de manière à faire disparaître le terme en v et le terme indépendant, et l'on divise par v^2.

4° On pose

$$V = (mv^2 + nv + k)^2,$$

et l'on détermine m et n de manière à faire disparaître les termes en v^2 et en v, et l'on divise par v^3; on a encore une équation du premier degré pour déterminer v.

Appliquons à l'équation (2).

On a les solutions évidentes $u = 0$, $u = 1$.

Faisant $h = 1$, on a :

1°

$$V = v^4 + 3v^3 + 4v^2 + 2v + 1 = (v^2 + mv + 1)^2;$$

on trouve

$$m = 1, \quad v = 1, \quad u = 0,$$

$$m = -\frac{3}{2}, \quad v = -4, \quad u = -3.$$

2°

$$v^4 + 3v^3 + 4v^2 + 2v + 1 = (v^2 + mv - 1)^2;$$

$$m = -1, \quad v = -1, \quad u = 0,$$

$$m = \frac{3}{2}, \quad v = -\frac{4}{3}, \quad u = -\frac{1}{3},$$

solutions équivalentes aux précédentes.

3°

$$v^4 + 3v^3 + 4v^2 - 2v + 1 = (v^2 + mv + n)^2;$$

$$m = \frac{3}{2}, \quad n = \frac{7}{8}, \quad v = \frac{3}{8}, \quad u = \frac{11}{8}.$$

4°

$$v^4 + 3v^3 + 4v^2 + 2v + 1 = (mv^2 + nv + 1)^2,$$

$$n = 1, \quad m = \frac{3}{2}, \quad v = 0, \quad u = 1.$$

Faisons maintenant $h = -3$, d'où $k = 11$:

$$V = v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121.$$

1°

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (v^2 + mv + 11)^2.$$

$$m = -\frac{13}{2}, \quad v = 4, \quad u = 1,$$

$$m = -\frac{71}{11}, \quad v = \frac{41}{11}, \quad u = \frac{8}{11}.$$

2°

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (v^2 + mv - 11)^2,$$

$$m = -\frac{13}{2}, \quad v = \frac{228}{35}, \quad u = \frac{123}{35},$$

$$m = \frac{71}{11}, \quad v = \frac{1073}{627}, \quad u = -\frac{808}{627}.$$

3°

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (v^2 + mv + n)^2,$$

$$m = -\frac{13}{2}, \quad n = -\frac{71}{11}, \quad v = \frac{35}{8}, \quad u = \frac{11}{8}.$$

4°

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (mv^2 + nv + 11)^2,$$

$$n = -\frac{71}{11}, \quad m = \frac{2703}{2 \times 11^3}, \quad v = \frac{763752}{219965}, \quad u = \frac{103857}{219965}.$$

On a ainsi les solutions

$$(0, 1, 1), \quad (1, 1, 1), \quad (3, -1, 11), \quad (8, 11, 101),$$
$$(123, 35, 13361), \quad (808, -627, 1169341),$$
$$(103857, 219965, 40176822841).$$

Ces solutions en feront trouver d'autres indéfiniment, sans autre difficulté que la longueur des calculs, à mesure que les nombres augmentent.

Ce premier calcul donne toutes les solutions simples indiquées par M. Lucas.

2. *Résoudre en nombres entiers l'équation*

$$x^4 - 5x^2y^2 + 5y^4 = z^2.$$

Il suffit, comme plus haut, de trouver les solutions en nombres premiers entre eux. On a la solution évidente

$$y = 0, \quad x = 1.$$

Divisant par y^4 et posant $\frac{x}{y} = u$, l'équation peut s'écrire

$$u^4 - 5u^2 + 5 = \frac{z^2}{y^4} = t^2.$$

On aperçoit immédiatement la solution $u = 1$, $t = 1$.

Posons $u = v + h$; il vient

$$v^4 + 4hv^3 + (6h^2 - 5)v^2 + (4h^3 - 10h)v + 1 = t^2.$$

Faisons $h = 1$:

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = t^2.$$

1° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (v^2 + mv + 1)^2;$$

$$m = 2 \quad \text{donne} \quad v = -2, \quad u = -1,$$

solution évidente *a priori*;

$$m = -3 \quad \text{donne} \quad v = 1, \quad u = 2.$$

2° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (v^2 + mv - 1)^2;$$

$$m = 2 \quad \text{donne} \quad v = -2, \quad u = -1,$$

$$m = 3 \quad \text{»} \quad v = -3, \quad u = -2.$$

3° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (v^2 + mv + n)^2;$$

$$m = 2, \quad n = 1, \quad v = -2, \quad u = -1.$$

4° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (mv^2 + nv + 1)^2;$$

$$n = -3, \quad m = -4, \quad v = -\frac{4}{3}, \quad u = -\frac{1}{3}.$$

Comme le signe de u est arbitraire, on a les solutions

$$u = 1, 2, \frac{1}{3},$$

ce qui donne pour l'équation proposée les solutions

$$(1, 0, 1),\ (1, 1, 1),\ (2, 1, 1),\ (1, 3, 19).$$

Faisons maintenant $h = 2$.

1°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (v^2 + mv + 1)^2;$$

$$m = 4, \quad v = -4, \quad u = -2,$$

$$m = 6, \quad v = -\frac{19}{4}, \quad u = -\frac{11}{4}, \quad z = 79.$$

2°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (v^2 + mv - 1)^2;$$

$$m = 4, \quad v = -4, \quad u = -2,$$

$$m = -6, \quad v = \frac{3}{4}, \quad u = \frac{11}{4}.$$

3°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (v^2 + mv + n)^2;$$

$$m = 4, \quad n = \frac{3}{2}, \quad 12v + 1 = 12v + \frac{n}{4},$$

$$v = \infty, \quad u = \infty, \quad y = 0.$$

4°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (mv^2 + nv + 1)^2;$$

$$n = 6, \quad m = -\frac{17}{2}, \quad v = \frac{88}{57}, \quad u = \frac{202}{57}, \quad z = 32479.$$

On a les nouvelles solutions

$$(11, 4, 79),\ (202, 57, 32479).$$

3. *Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers et tels que le carré de l'hypoténuse, augmenté ou diminué du double de l'aire du triangle, soit égal à un carré parfait.*

Les côtés et l'aire d'un triangle rectangle en nombres

entiers sont donnés par les formules

$$x = p^2 - q^2, \quad y = 2pq, \quad z = p^2 + q^2, \quad s = pq(p^2 - q^2).$$

Il faut donc que l'on ait

$$(1) \qquad p^4 + 2p^3q + 2p^2q^2 - 2pq^3 + q^4 = r^2,$$

ou, en posant $\frac{p}{q} = u$,

$$(2) \qquad u^4 + 2u^3 + 2u^2 - 2u + 1 = \frac{r^2}{q^4} = t^2.$$

1° Il suffit de chercher les solutions de l'équation (1) en nombres premiers entre eux, car tous les triangles semblables jouiront de la même propriété.

2° Les deux solutions $u = \frac{a}{b}$ et $u = -\frac{b}{a}$ sont équivalentes. Si l'on écrit la valeur de u de telle sorte que le numérateur soit plus grand que le dénominateur en valeur absolue, le carré de l'hypoténuse devra être augmenté ou diminué du double de l'aire du triangle, suivant que cette valeur de u sera positive ou négative.

Cherchons d'abord une solution de l'équation (2) en posant

$$u^4 + 2u^3 + 2u^2 - 2u + 1 = (u^2 - mu + 1)^2;$$

$$m = 1 \quad \text{donne} \quad u = -4, \quad p = 4, \quad q = 1,$$

$$x = 15, \quad y = 8, \quad z = 17, \quad 2s = 20, \quad z^2 - 2s = 13^2,$$

$$m = -1, \quad u = \frac{1}{4}, \quad \text{même solution.}$$

$$u^4 + 2u^3 + 2u^2 - 2u + 1 = (mu^2 + nu + 1)^2;$$

$$n = -1, \quad m = \frac{1}{2}, \quad u = -4,$$

solution déjà trouvée.

Soient, en général, h une solution de l'équation (2), k^2 le résultat de sa substitution dans le premier membre.

Posons $u = v + h$; l'équation deviendra

$$v^4 + (4h + 2)v^3 + (6h^2 + 6h + 2)v^2 + (4h^3 + 6h^2 + 4h - 2)v + k^2 = t^2.$$

Faisons $h = -4$:

1°

$$v^4 - 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (v^2 + mv + 13)^2;$$
$$m = -7, \quad v = 4, \quad u = 0,$$

solution inadmissible ;

$$m = -\frac{89}{13}, \quad v = \frac{191}{52}, \quad u = -\frac{17}{52}, \quad p = 52, \quad q = 17,$$
$$x = 2415, \quad y = 1768, \quad z = 2993, \quad z^2 + 2s = 3637^2.$$

2°

$$v^4 - 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (v^2 + mv - 13)^2;$$
$$m = -7, \quad v = \frac{120}{17}, \quad u = \frac{52}{17},$$

solution équivalente à la précédente;

$$m = \frac{89}{13}, \quad v = \frac{2993}{1560},$$
$$u = -\frac{3247}{1560}, \quad p = 3247, \quad q = 1560,$$
$$x = 8109409, \quad y = 10130740, \quad z = 12976609,$$
$$z^2 - 2s = 9286489^2.$$

3°

$$v^4 - 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (v^2 + mv + n)^2;$$
$$m = -7, \quad n = \frac{25}{2}, \quad v = \frac{17}{4}, \quad u = \frac{1}{4},$$

solution équivalente à -4.

4°

$$v^4 - 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (mv^2 + nv + 13)^2;$$

$$n = -89, \quad m = -\frac{7847}{2},$$

$$v = \frac{2793476}{61575405}, \quad u = -\frac{243508144}{61575405},$$

$$x = 5550468569341071 1, \quad y = 2998822517519664 0,$$

$$z = 6308774669523876 1, \quad z^2 - 2s = 3363994206872969^2.$$

Les mêmes méthodes, appliquées aux solutions obtenues, en feront trouver d'autres indéfiniment.

4. *Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers, tels que le carré de l'hypoténuse, augmenté ou diminué de l'aire du triangle, soit égal à un carre parfait.*

En adoptant les mêmes notations que précédemment, l'équation du problème est

$$(1) \qquad p^4 + p^3q + 2p^2q^2 - pq^3 - q^4 = r^2$$

ou

$$(2) \qquad u^4 + u^3 + 2u^2 - u + 1 = t^2.$$

La méthode précédente, appliquée directement à l'équation (2), donne la solution

$$u = -8, \quad p = 8, \quad q = 1,$$

$$x = 63, \quad y = 16, \quad z = 65, \quad s = 504, \quad z^2 - s = 61^2.$$

Posons $u = v + h$; il vient

$$v^4 + (4h + 1)v^3 + (6h^2 + 3h + 2)v^2 + (4h^3 + 3h^2 + 4h - 1)v + k^2 = t^2.$$

Faisons $h = -8$:

1°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (v^2 + mv + 61)^2;$$

$$m = -\frac{31}{2} \quad \text{donne} \quad v = 8, \quad u = 0,$$

qui ne donne pas de triangle ;

$$m = -\frac{1889}{122}, \quad v = \frac{3839}{488}, \quad u = -\frac{65}{488} \quad \text{ou} \quad u = \frac{488}{65},$$

$$x = 233919, \quad y = 63440, \quad z = 242369, \quad z^2 + s = 257211^2.$$

2°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (v^2 + mv - 61)^2;$$

$$m = -\frac{31}{2}, \quad v = \frac{1008}{65}, \quad u = \frac{488}{65},$$

solution identique à la précédente ;

$$m = \frac{1889}{122}, \quad v = \frac{242369}{61288},$$

$$u = -\frac{249535}{61488}, \quad p = 249535, \quad q = 61488,$$

$$x = 584869420 81, \quad y = 306868161 60, \quad z = 660484903 69,$$

$$z^2 - s = 588643700 41^2.$$

3°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (v^2 + mv + n)^2,$$

$$m = -\frac{31}{2}, \quad n = \frac{487}{8}, \quad v = \frac{65}{8}, \quad u = \frac{1}{8},$$

solution identique à $u = -8$.

4°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (mv^2 + nv + 61)^2;$$

$$n = -\frac{1889}{122}, \quad m = \frac{1819687}{122^3},$$

$$v = \frac{215530738 80}{279136377 3}, \quad u = -\frac{7778363 04}{279136377 3},$$

$$x = 718623233735641 5113,$$
$$y = 434244816061962 9984,$$
$$z = 839629096899717 5945,$$
$$\sqrt{z^2 + s} = 915204836016240 1489.$$

Au moyen des solutions déjà obtenues, on pourra en trouver d'autres indéfiniment.

5. *Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers, tels que l'aire du triangle, augmentée des carrés construits sur les trois côtés, soit égale à un carré parfait.*

L'équation à satisfaire est

$$pq(p^2 - q^2) + 2(p^2 + q^2)^2 = r^2$$

ou

$$pq(p + q)(p - q) + 2(p^2 + q^2)^2 = r^2.$$

Or, dans les quatre nombres p, q, $p + q$, $p - q$, il y a nécessairement un multiple de 3, et il n'y en a qu'un seul, puisque p et q sont supposés premiers entre eux : le premier membre de l'équation est donc de la forme $3m + 2$, incompatible avec celle d'un carré; il en résulte que le problème proposé n'a pas de solution.

On voit de même qu'il n'existe pas de triangle rectangle en nombres entiers tel que la somme des carrés des trois côtés, diminuée de l'aire du triangle, soit un carré parfait.