

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 139-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__139_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

Le numéro de décembre 1880 des *Nouvelles Annales de Mathématiques* renferme une très intéressante *Di-*

gression historique sur les quantités négatives. On y voit (p. 563) que le mot *Algèbre* vient de l'arabe. Je voudrais vous faire une simple observation orthographique sur la transcription *dchebr* du mot arabe.

Ce mot⁽¹⁾ est composé de trois lettres, dont la première (le *djim*) représentait, originairement, l'articulation de notre *g* devant *a, o, u*; mais cette lettre s'est adoucie par la suite et a pris la valeur du *g* italien, c'est-à-dire celle de *dj* français, qu'elle a partout aujourd'hui, à l'exception de quelques contrées orientales, notamment l'Égypte, où elle a conservé sa valeur archaïque. C'est avec la valeur de *dj* que le *djim* arabe s'est introduit dans les alphabets persan, turk et hindoustani.

Les Allemands, ne connaissant pas l'articulation douce de notre *j*, transcrivent le *djim* des noms orientaux d'une façon fort barbare par *dsch*; ils écrivent donc *al dschebr* au lieu de *al djebr*, et c'est en copiant les Allemands que des Français écrivent *al dchebr*, fort à tort puisque nous pouvons rendre *exactement* le mot arabe. Les Anglais écrivent tout naturellement *al jebr*, leur *j* ayant exactement la valeur de la lettre arabe (*dj*). Il y a donc une singulière méprise dans cette phrase : « Le nom *al dchebr*, et plus tard *al jebr*... » *Dchebr* est une orthographe tudesque, et *jebr* l'orthographe anglaise d'un seul et même mot arabe qui n'a jamais varié et que nous devons transcrire par *djebr*.

G^{al} PARMENTIER.

*Extrait d'une lettre de M. D. Marchand,
curé de Pontoise.*

J'avais trouvé depuis longtemps une formule permettant de calculer la somme des cinquièmes puissances

⁽¹⁾ *جبر*, dont la première lettre *a droite* ≙ équivalant à *dj*

des n premiers nombres entiers. La voici :

$$\Sigma n^5 = n^3 \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-1)(n)^2(n+1)}{12} \right].$$

Aujourd'hui même, après avoir lu les développements donnés (2^e série, t. XVIII, p. 459), j'ai voulu savoir, malgré mon ignorance de l'Algèbre, si je ne pourrais pas découvrir une autre formule.

Faisant application de ma méthode de décomposition des éléments contenus dans un quotient, je suis arrivé rapidement au résultat suivant :

$$\Sigma n^5 = \frac{n(n+1)}{2} \left[\frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{2(n-1)(n)(n+1)(n+2)}{24} \right].$$

Voici, du reste, comment j'ai raisonné :

1^o On sait que la somme de deux nombres à la première puissance divise exactement la somme de ces mêmes nombres dans les puissances impaires, la troisième, la cinquième, la septième, etc.

2^o On sait également qu'à la cinquième puissance, comme à la neuvième, la treizième, la dix-septième, etc., les *désinences* des nombres sont les mêmes qu'à la première puissance.

3^o On sait encore que les nombres triangulaires, en dernière analyse, se forment par l'addition successive des nombres.

M'appuyant sur ces principes, j'ai tiré rigoureusement les conclusions suivantes :

1^o n divise exactement Σn^5 .

2^o $\frac{n(n+1)}{2}$ divise exactement Σn^5 , puisque les *désinences* de la cinquième puissance sont les mêmes que celles de la première puissance.

3^o La division de Σn^5 par $\frac{n(n+1)}{2}$ étant effectuée, il

n'y a plus qu'une seule chose à faire : c'est d'*analyser le quotient*.

4° Or, les éléments contenus dans le quotient sont les suivants :

1° Le carré du triangle de n ;

2° Deux fois le pyramido-pyramidal de $n - 1$, c'est-à-dire

$$\begin{array}{l} 1^{\circ} \quad n(n-1)^2, \\ 2^{\circ} \quad 2 \frac{(n-1)(n)(n-1)(n-2)}{4}, \end{array}$$

ce qui donne la formule

$$\Sigma n^3 = \frac{n(n+1)}{2} \left| \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{2(n-1)(n)(n-1)(n-2)}{4} \right|.$$

Note relative à un théorème de M. Weill. — A la page 57 de ce Tome, M. Weill démontre le théorème suivant :

Lorsqu'un polygone convexe se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux circonférences, sa surface reste proportionnelle à celle du polygone ayant pour sommets les points de contact des côtés du premier avec la circonférence intérieure.

D'autre part, j'ai, en 1864, proposé la question suivante, qui porte le n° 711 dans les *Nouvelles Annales* :

Lorsqu'un polygone est à la fois inscrit à un cercle et circonscrit à un autre cercle : 1° le centre des moyennes distances des points de contact est situé sur la ligne des centres des deux cercles; 2° le double de la surface du polygone est égal à la somme des sinus de ses angles, multipliée par la puissance du centre du cercle inscrit par rapport au cercle circonscrit, prise en signe contraire.

Dans l'énoncé des *Nouvelles Annales*, les mots *prise en signe contraire* ont été omis. Ce théorème figure aussi dans mon *Recueil de théorèmes relatifs aux sections coniques*, publié en 1867. La seconde partie de ce théorème (qui n'a pas encore été démontrée) rend évident celui de M. Weill, puisque la surface du polygone ayant pour sommets les points de contact est égale au carré du rayon du cercle inscrit, multiplié par la moitié de la somme des sinus des angles du polygone donné.

H. FAURE.

On lit, 2^e série, t. XIX, p. 255.

La formule (1) donne immédiatement ce théorème, qui est dû à M. Mansion et qu'il a étendu à l'espace :

Si un triangle est circonscrit à une conique et si le point de concours des hauteurs de ce triangle a une puissance constante par rapport au cercle circonscrit, ce point décrit un cercle concentrique à la conique.

M. Weill m'attribue là un théorème qui appartient à quelque autre.

P. MANSION,

Professeur à l'Université de Gand.

M. le Dr Marcello Rocchetti nous a envoyé une deuxième solution de la question 1340, ainsi généralisée :

« Déterminer l'aire du triangle S, dont les sommets sont les pieds de trois lignes droites α , β , γ menées respectivement par les sommets A, B, C du triangle ABC, de manière qu'elles divisent les côtés opposés a , b , c en rapports donnés. »

Il en a déduit l'expression que nous avons proposée dans la question 1353, antérieurement à la publication de l'énoncé de cette question.