

WEILL

Théorèmes sur les normales à l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 110-112

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__110_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES SUR LES NORMALES A L'ELLIPSE;

PAR M. WEILL

[FIN (1).]

Dans le cas du problème proposé, le rapport (2) est égal à l'unité, puisqu'il existe une conique tangente aux côtés du triangle $A'B'C'$ aux points A, B et C. Le rapport (1) est donc aussi égal à l'unité. Par suite, si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ les distances du point P aux six droites menées par chacun des points A, B et C, perpendiculairement aux côtés qui aboutissent en ces points, l'équation du lieu du point P sera

$$\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'.$$

Ce lieu, qui est du troisième degré, a pour centre le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et pour asymptotes les perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés; il passe par les trois points A, B, C, par le centre du cercle circonscrit au triangle, le point de concours de ses hauteurs et les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle.

Cherchons maintenant le lieu des sommets A', B', C' du triangle obtenu en menant des tangentes à la conique

(1) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XX, p. 68.

aux points A, B, C . Chacun des sommets de ce triangle décrit une courbe du troisième degré différente, et ces trois courbes ont sept points communs, qui sont les sommets A, B, C du triangle donné et les centres des cercles inscrit et exinscrits à ce triangle. Considérons, en particulier, le lieu du point A' . Cette courbe du troisième degré passe par les points A, B, C , par les centres I, I', I'', I''' des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC , et par le point diamétralement opposé au point A sur le cercle circonscrit au triangle; elle a pour directions asymptotiques les côtés AB, AC et la perpendiculaire au côté BC ; enfin elle passe par le milieu du côté BC .

Parmi toutes les coniques circonscrites au triangle ABC et telles que les normales en A, B, C soient concourantes, on peut considérer les deux droites AB, AC , qui forment une conique répondant à la question; le triangle $A'B'C'$ qui lui correspond a un sommet déterminé, qui est le point A' , diamétralement opposé au point A sur le cercle circonscrit au triangle ABC , et les deux autres sommets la droite B', C' sont indéterminés sur les droites $A'B, A'C$, la droite $B'C'$ qui les joint passant constamment par le point A ; donc le lieu complet des points A', B', C' se compose de *six droites et de trois courbes du troisième degré*.

Considérons une droite quelconque passant par le point A ; elle rencontre la courbe du troisième degré qui forme le lieu du point P en deux points P' et P'' ; au point P' correspond une conique circonscrite à ABC et un triangle $A'B'C'$; de même, au point P'' correspond un triangle $A''B''C''$. Les points B', B'', C', C'' sont sur la droite menée par A perpendiculairement à PA , et ces points forment deux groupes $(B', B''), (C', C'')$; les deux premiers points B' et B'' sont situés sur une courbe connue du troisième degré; les deux autres C' et C'' sont aussi sur une

courbe connue du troisième degré et différente de la précédente. Or, les abscisses des points P' et P'' ne dépendent que d'un radical carré; il en est donc de même des abscisses des points B', B'', C', C'' , puisque les deux courbes du troisième degré qui contiennent ces points passent toutes deux par le point A .

Si l'on considère une des coniques circonscrites au triangle ABC et telle que les normales en A , B et C soient concourantes en un point P , si l'on projette ce point en Q, R, S sur les trois côtés, il existera, d'après le théorème de Géométrie que nous avons établi, une conique tangente aux trois côtés du triangle ABC aux points Q, R, S . Dès lors, si l'on projette le point P en Q', R', S' sur les côtés du triangle QRS , il y aura une troisième conique tangente aux côtés du triangle QRS aux points Q', R', S' , et ainsi de suite. M. Laguerre a énoncé sous forme de question (*Nouvelles Annales*, question 1341, mars 1880), une proposition qui est, au fond, identique à la précédente.

Sans développer davantage ce sujet, nous énoncerons une dernière propriété :

THÉORÈME XIV. — *Lorsqu'un triangle est inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, si l'on pose $t = \tan \frac{\varphi}{2}$, φ étant le paramètre angulaire de l'un des sommets, l'équation qui donne à chaque instant les trois valeurs de t sera*

$$t^3 + \lambda t^2 + Ct + \frac{\lambda}{C} = 0,$$

dans laquelle C est une constante et λ un paramètre variant avec la position du triangle.
