

GAMBEY

**Solution de la question de mathématiques
spéciales proposée au concours
d'agrégation de 1878**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 82-86

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__82_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1878;**

PAR M. GAMBÉY.

On donne une sphère S, un plan P et un point A; par le point A on mène une droite qui rencontre le plan P en un point B, puis sur AB comme diamètre on décrit une sphère S'; le plan radical des sphères S et S' rencontre la droite AB en un point M:

1° Trouver le lieu décrit par le point M quand la droite AB tourne autour du point A;

2° Discuter le lieu du point M en supposant que le point A se déplace dans l'espace, le point P et la sphère S restant fixes.

Je prends le plan P pour plan des xy et je fais passer l'axe des z par le centre de la sphère S.

Soient :

α, β, γ les coordonnées du point A;

h le z du centre de S;

r son rayon.

Les équations d'une droite quelconque AB passant en A étant prises sous la forme

$$x - \alpha = m(z - \gamma),$$

$$y - \beta = n(z - \gamma),$$

on en déduit, pour les coordonnées du point milieu du segment AB,

$$\alpha - \frac{m\gamma}{2}, \quad \beta - \frac{n\gamma}{2}, \quad \frac{\gamma}{2},$$

et, pour l'équation de la sphère S',

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 + m\gamma(x - \alpha) + n\gamma(y - \beta) - \gamma z = 0.$$

D'ailleurs, l'équation de S est

$$x^2 + y^2 + (z - h)^2 - r^2 = 0.$$

Retranchant ces équations membre à membre, il vient, pour l'équation du plan radical des sphères S et S',

$$\begin{aligned} m\gamma(x - \alpha) + n\gamma(y - \beta) - 2\alpha x - 2\beta y \\ + (2h - \gamma)z + \alpha^2 + \beta^2 + r^2 - h^2 = 0. \end{aligned}$$

En éliminant m et n entre cette équation et celles de la droite AB, on obtiendra l'équation du lieu cherché. Cette élimination est immédiate, et l'on obtient, après quelques calculs et réductions,

$$(1) \quad \begin{cases} \gamma(x^2 + y^2) + (2h - \gamma)z - 2\beta yz - 2\alpha xz \\ + (S + 2K^2)z - K^2\gamma = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - 2h\gamma + h^2 - r^2 = S \quad \text{et} \quad r^2 - h^2 = K^2,$$

avec l'hypothèse $r > h$.

Propriétés générales du lieu. — L'équation (1) représente une surface du second ordre qui passe au point A. Cette surface admet comme plans cycliques les plans parallèles au plan P, et le point A est un de ses ombilics, car, pour $z = \gamma$, on obtient le cercle-point

$$z = \gamma, \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 0.$$

L'équation (1) pouvant encore s'écrire des deux manières suivantes,

$$(2) \quad \begin{cases} \gamma(x^2 + y^2 - K^2) \\ - z[2\alpha x + 2\beta y + (\gamma - 2h)z - S - 2K^2] = 0, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \gamma[x^2 + y^2 + (z - h)^2 - r^2] \\ - z[2\alpha x + 2\beta y + 2(\gamma - h)z - 2h\gamma - S - 2K^2] = 0, \end{cases}$$

on en conclut que la surface qu'elle représente contient

les courbes planes intersections du cylindre

$$x^2 + y^2 - K^2 = 0$$

avec les deux plans

$$z = 0, \quad 2\alpha x + 2\beta y + (\gamma - 2h)z - S - 2K^2 = 0,$$

ainsi que celles qui résultent de l'intersection de la sphère S et des plans

$$z = 0, \quad 2\alpha x + 2\beta y + 2(\gamma - h)z - 2h\gamma - S - 2K^2 = 0.$$

La surface (3) et la sphère S sont donc doublement tangentes. On voit en outre que le plan

$$2\alpha x + 2\beta y + 2(\gamma - h)z - 2h\gamma - S - 2K^2 = 0$$

est parallèle au plan polaire du point A par rapport à la sphère S.

Discussion. — J'emploie la transformation en carrés. Mettant tout de suite de côté le cas où le point A est dans le plan P, cas auquel l'équation (1) se décompose en deux facteurs linéaires dont l'un désigne le plan P, je suppose γ différent de zéro.

Je multiplie par γ , ce qui permet de former immédiatement deux carrés. L'équation (1) peut alors s'écrire

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\gamma x - \alpha z)^2 + (\gamma y - \beta z)^2 \\ - (S + K^2)z + \gamma(S + 2K^2)z - K^2\gamma = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on a $S + K^2 = 0$, c'est-à-dire si le point A est sur la sphère concentrique à la sphère S et tangente au plan P, l'équation du lieu est ramenée au type

$$M^2 + N^2 + P = 0;$$

elle représente alors un *paraboloïde elliptique*.

Si l'on a en outre $S = 0$, ce qui suppose $r = h$, le lieu se compose de la droite réelle intersection des deux

plans imaginaires

$$(\gamma x - \alpha z)^2 + (\gamma y - \beta z)^2 = 0.$$

Supposons maintenant que l'on ait $S + K^2$ différent de zéro. On peut alors multiplier (4) par $S + K^2$ et l'écrire ainsi :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (S + K^2) [(\gamma x - \alpha z)^2 + (\gamma y - \beta z)^2] \\ - [(S + K^2)z + \frac{\gamma}{2}(S + 2K^2)]^2 = -\gamma^2 S^2. \end{array} \right.$$

Elle rentre alors dans le type des surfaces à centre unique.

Distinguons deux cas, et, pour abrégé, posons $S + K^2 = S_1$.

1° $S \geq 0$. — Si l'on a $S_1 > 0$, c'est-à-dire si le point A est extérieur à la sphère concentrique à la sphère S et tangente au plan P, la surface est un *hyperboloïde à une nappe*.

Si au contraire on a $S_1 < 0$, c'est-à-dire si le point A est intérieur à la même sphère, la surface est un *ellipsoïde réel*.

Le cas de $S_1 = 0$ a déjà été examiné.

2° $S = 0$. — Pour $S_1 > 0$, on a un *cône réel*. Cela suppose $r > h$, ce qui est justement notre hypothèse.

Si l'on supposait $r < h$, le cône deviendrait imaginaire.

Ainsi, lorsque le point A est dans la région de l'espace extérieure à la sphère concentrique à S et tangente à P, le lieu est un hyperboloïde à une nappe.

Si ce point est dans la région intérieure à la même sphère, le lieu est un ellipsoïde.

Enfin, si le point A est sur la surface séparative, le lieu est un paraboloides elliptique.

Dans le cas où le point A est situé sur la sphère

donnée, l'hyperboloïde se confond avec son cône asymptote.

Note. — La même question a été résolue par MM. Duranton, professeur au lycée du Puy ; A. Leinekugel.