

CH. BIEHLER

Sur une application de la méthode de Sturm

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 76-81

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__76_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DE POUR CASSES CHIFFRÉES

SUR UNE APPLICATION DE LA MÉTHODE DE STURM;

PAR M. CH. BIEHLER,

Directeur des études à l'École préparatoire du collège Stanislas.

L'application de la méthode de Sturm à l'équation de degré m qui fournit les m valeurs de $\tan \frac{\alpha}{m}$, quand on

connaît $\tan \alpha$, donne lieu à une remarque qui offre quelque intérêt.

Si l'on pose

$$\operatorname{tang} \alpha = a, \quad \operatorname{tang} \frac{\alpha}{m} = x,$$

l'équation dont il s'agit est

$$a = \frac{(1 + ix)^m - (1 - ix)^m}{i[(1 + ix)^m + (1 - ix)^m]},$$

et, mise sous forme entière, elle devient

$$(1 + ix)^m(1 - ia) - (1 - ix)^m(1 + ia) = 0.$$

Le premier membre de cette équation renferme i en facteur. Soit

$$(1) \quad \iota U_m = (1 + \iota x)^m (1 - \iota a) - (1 - \iota x)^m (1 + \iota a),$$

et désignons généralement par iU_μ le polynôme

$$\iota \mathbf{U}_\perp = (\mathbf{I} + \iota \mathbf{x})^\mu (\mathbf{I} - \iota \mathbf{a}) - (\mathbf{I} - \iota \mathbf{x})^\mu (\mathbf{I} + \iota \mathbf{a});$$

on a entre U_m, U_{m-1}, U_{m-2} la relation

$$(2) \quad U_m - 2U_{m-1} + (1+x^2)U_{m-2} = 0.$$

On obtient cette relation en multipliant membre à membre l'équation (1) et la suivante

$$(3) \quad 2 = (1 + ix) + (1 - ix),$$

et en changeant dans le résultat obtenu m en $m - 1$.

C'est l'équation (2) qui va nous permettre d'établir, par la méthode de Sturm, la réalité de toutes les racines de l'équation

$$\mathbf{U}_m = \mathbf{0}.$$

De l'équation (2) on tire en effet, par le changement de m en $m-1, m-2, \dots, 3, 2$, les suivantes :

[illegible]

Ces fonctions U jouissent des propriétés suivantes :

- 1° U_0 est une constante, $U_0 = -2a$;
- 2° Deux fonctions consécutives U_μ , $U_{\mu-1}$ ne peuvent s'annuler pour une même valeur de x , car U_0 devrait s'annuler, ce qui est impossible d'après ce qui précède;
- 3° Si une fonction U_μ s'annule pour une certaine valeur de x , les deux fonctions $U_{\mu-1}$, $U_{\mu+1}$ sont de signes contraires.

On en conclut que, si la suite des fonctions

$$U_m, U_{m-1}, \dots, U_1, U_0$$

présente k variations pour $x = \alpha$ et k' variations pour $x = \alpha'$, il y a au moins $k - k'$ racines réelles de l'équation $U_m = 0$ entre α et α' si k est supérieur à k' , et $k' - k$ racines réelles si k est inférieur à k' .

Pour les formes $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ du nombre entier μ , les coefficients du terme de degré le plus élevé de U_μ sont respectivement

$$-2a, +2, +2a, -2.$$

On voit donc que, si $a > 0$, la suite

$$(5) \quad U_0, U_1, U_2, \dots, U_m$$

donne, pour $x = -\infty$, la succession des signes

$$- \quad - \quad + \quad + \quad - \quad - \quad \dots$$

et, pour $x = +\infty$, la nouvelle succession

$$- \quad + \quad + \quad - \quad - \quad + \quad + \quad \dots;$$

dans chacune des deux suites les signes n'alternent que de deux en deux, et, si $a < 0$, on a :

$$\begin{array}{l} \text{pour } x = -\infty, + \quad - \quad - \quad + \quad + \quad - \quad - \quad \dots, \\ \text{pour } x = +\infty, + \quad + \quad - \quad - \quad + \quad + \quad \dots \end{array}$$

Si donc m est pair, le nombre des variations que présente la suite (5) pour $x = -\infty$ est le même que celui qu'elle présente pour $x = +\infty$; dans chaque cas, ce nombre est égal à $\frac{m}{2}$; la quantité $k - k'$ dont il a été question est donc égale à zéro, et la méthode de Sturm semble indiquer que l'équation $U_m = 0$ n'a pas de racines réelles.

Mais, si l'on fait $x = 0$ dans toutes les fonctions de la suite (5), toutes les fonctions de cette suite prennent la même valeur $-2a$; pour $x = -\infty$, la suite (5) présente $\frac{m}{2}$ variations ; pour $x = 0$, elle n'offre plus que des permanences : la suite (5) a donc perdu $\frac{m}{2}$ variations.

L'équation $U_m = 0$ a donc au moins $\frac{m}{2}$ racines négatives.

Pour $x = +\infty$, la suite (5), présentant $\frac{m}{2}$ variations, en a gagné $\frac{m}{2}$ quand x a varié de zéro à $+\infty$.

L'équation $U_m = 0$ a donc au moins $\frac{m}{2}$ racines positives, et, comme elle n'est que de degré m , toutes ces racines sont réelles et il y en a autant de positives que de négatives.

Si m est impair, on voit aisément que, dans le cas de $a > 0$, l'équation $U_m = 0$ a $\frac{m+1}{2}$ racines positives et $\frac{m-1}{2}$ racines négatives ; et inversement, si $a < 0$, l'équation $U_m = 0$ a $\frac{m+1}{2}$ racines négatives et $\frac{m-1}{2}$ racines positives.

L'équation $U_m = 0$ a donc, dans tous les cas, toutes ses racines réelles.

Nous avons vu que, si l'on substitue dans la suite (5) successivement $-\infty$ et $+\infty$, le nombre des variations gagnées ou perdues est zéro dans le cas de m pair et 1 dans le cas de m impair.

Cela tient à ce que le rapport $\frac{U_{m-1}}{U_m}$ passe du négatif au positif quand x , en croissant, traverse une racine négative de $U_m = 0$; au contraire, le rapport $\frac{U_{m-1}}{U_m}$ passe du positif au négatif quand x , en croissant, traverse une racine positive de $U_m = 0$. Car la suite (5) perd des variations quand x croît de $-\infty$ à zéro; elle en gagne quand x croît de zéro à $+\infty$.

Il est aisé de démontrer directement que le rapport $\frac{U_{m-1}}{U_m}$ jouit de cette intéressante propriété.

Si l'on prend les dérivées des deux membres de l'égalité (1), il vient

$$(6) \quad U'_m = m[(1+ix)^{m-1}(1-ia) + (1-ix)^{m-1}(1+ia)],$$

et, si l'on multiplie (6) par l'identité

$$(7) \quad 2ix = (1+ix) - (1-ix),$$

membre à membre, il viendra

$$(8) \quad 2xU'_m = mU_m - m(1+x^2)U_{m-2}.$$

Cette équation, combinée avec l'équation (2), savoir

$$U_m = 2U_{m-1} - (1+x^2)U_{m-2},$$

donne

$$(9) \quad xU'_m + mU_{m-1} - mU_m = 0,$$

d'où

$$\frac{U_{m-1}}{U_m} = 1 - \frac{x}{m} \frac{U'_m}{U_m}.$$

On sait que, lorsque x , en croissant, traverse une des racines de $U_m = 0$, le rapport $\frac{U'_m}{U_m}$ passe toujours du négatif au positif.

Pour une valeur de x voisine d'une des racines de l'équation $U_m = 0$, le signe de $\frac{U_{m-1}}{U_m}$ est celui de $-x \frac{U'_m}{U_m}$, car cette quantité peut devenir en valeur absolue aussi grande qu'on le veut.

On voit donc que, lorsque x , en croissant, traverse une racine négative de $U_m = 0$, le rapport $-x \frac{U'_m}{U_m}$ passe du négatif au positif comme $\frac{U'_m}{U_m}$; mais, lorsque x traverse en croissant une racine positive de $U_m = 0$, le rapport $-x \frac{U'_m}{U_m}$, et par suite aussi $\frac{U_{m-1}}{U_m}$, passe du positif au négatif.

La méthode de Sturm est donc applicable séparément à chacun des deux intervalles de $-\infty$ à zéro et de zéro à $+\infty$, et elle met ainsi en évidence la réalité de toutes les racines de l'équation $U_m = 0$.

On voit de plus qu'elles sont inégales. En effet, l'équation (9) montre que toute racine multiple de $U_m = 0$ annulerait U_{m-1} , et par suite, d'après (4), elle annulerait $U_{m-2}, U_{m-3}, \dots, U_0$. Or $U_0 = -2a$; par conséquent, U_0 ne peut s'annuler et l'équation $U_m = 0$ n'a que des racines simples.