

G. KÆNIGS

Propriété des courbes ou des surfaces du second ordre homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 74-76

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__74_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉ DES COURBES OU DES SURFACES DU SECOND ORDRE HOMOFOCALES;

PAR M. G. KOENIGS,

Élève de l'École Normale supérieure.

Trois coniques A, B, C sont liées par la condition que les deux premières soient polaires réciproques par rapport à la troisième; N et Δ désignant un point du plan et sa polaire par rapport à la conique C , on a le théorème suivant :

Les tangentes issues du point N à la conique A , les coniques B et C marquent sur la droite Δ trois couples de points en involution.

En effet, soient x et y les points doubles de l'involution déterminée sur la droite Δ par les coniques B et C . Ces points étant conjugués par rapport à ces deux coniques, on voit que : 1° leurs polaires par rapport à la conique C sont les droites Ny et Nx ; 2° ces droites Nx et Ny sont conjuguées par rapport à la conique A , puisque leurs pôles y et x par rapport à C sont conjugués par rapport à B , et que cette conique B est précisément la polaire réciproque de A par rapport à la conique C . Le faisceau formé par les tangentes issues du point N à la conique A et par les droites Nx, Ny est donc harmonique, ce qui montre que les traces de ces tangentes sur la droite Δ divisent harmoniquement le segment xy , et cela suffit pour démontrer le théorème.

Désignons, suivant l'usage, par $\boxed{AC}$ le quadrilatère circonscrit commun aux deux coniques A et C .

On voit que Nx et Ny sont les rayons doubles du

faisceau involutif de tangentes issues du point N aux coniques inscrites dans le quadrilatère $\boxed{AC}$.

Du reste, le théorème précédent énonce que, si M et M' sont les points de rencontre de la conique B avec la droite Δ , NM et NM' sont deux tangentes issues du point N à une même conique inscrite dans le quadrilatère $\boxed{AC}$.

Imaginons actuellement que le système des coniques inscrites dans le quadrilatère soit homofocal ; les droites Nx et Ny seront les bissectrices de l'angle formé par un couple quelconque de tangentes issues du point N .

Le théorème ci-dessus prend alors la forme suivante :

Soit un point N du plan ; sa polaire Δ par rapport à une conique C donnée coupe cette conique en des points Q et Q' ; elle coupe aussi en M et M' une conique B , polaire réciproque par rapport à C d'une conique quelconque homofocale à C : les angles MNQ , $M'N'Q'$ sont égaux.

Ce théorème renferme le suivant, dû à M. Laguerre :

Soit un point N du plan ; sa polaire Δ par rapport à une conique C donnée coupe cette conique en des points Q et Q' ; elle coupe aussi en M et M' le cercle B , lieu des points d'où la conique C est vue sous un angle droit : les angles MNQ , $M'N'Q'$ sont égaux.

Ce théorème résulte du précédent, car le cercle B est, on le sait, la polaire réciproque par rapport à C d'une conique homofocale.

Mais ce qui paraît plus intéressant, c'est l'extension de ce théorème aux surfaces du second ordre.

Soient A , B , C trois surfaces du second ordre liées par la condition que les deux premières soient polaires réciproques par rapport à la troisième ; désignons par N

et Π un point et son plan polaire par rapport à la surface C. On a ce théorème :

Le cône circonscrit à A et de sommet N, les surfaces B et C tracent sur le plan Π trois coniques ayant le même triangle conjugué commun.

La démonstration est analogue à celle qui a été faite plus haut ; il est donc inutile de la recommencer. Mais ce qu'il importe de remarquer, c'est que, en désignant par x, y, z les sommets de ce triangle, les plans Nzy, Nxz, Nyx sont les plans tangents au point N aux trois surfaces du second ordre qui passent par ce point en étant inscrites dans la développable commune aux deux surfaces A et C. On sait que ces trois plans sont rectangulaires dans le cas où les surfaces A et C sont homofocales. Les droites Nx, Ny, Nz sont alors rectangulaires, et tout cône ayant pour sommet le point N et pour base une conique ayant le triangle xyz comme triangle conjugué admet les trois droites ci-dessus pour axes.

De là ce théorème :

Étant donné un point N, son plan polaire par rapport à une surface C du second ordre coupe suivant une conique Q cette surface et suivant une conique M la réciproque B par rapport à C d'une homofocale à C : les cônes ayant leur sommet au point N et ayant Q et M pour bases ont les mêmes axes.
