

G. DE LONGCHAMPS

Théorème d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 71-73

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__71_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME D'ALGÈBRE;

PAR M. G. DE LONGCHAMPS.

THÉORÈME. — *Si l'on désigne par $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ les p premiers coefficients d'une équation, coefficients supposés positifs, et par N et N' les deux coefficients négatifs les plus élevés, le nombre*

$$Z = 1 + \frac{N + N'}{2A_0 + 2A_1 + \dots + 2A_{p-2} + A_{p-1}}$$

est une limite supérieure des racines positives de l'équation.

Nous rappellerons d'abord une règle très simple pour trouver une limite supérieure des racines positives. Cette

règle, qui est une règle de Maclaurin perfectionnée, mais plus commode et souvent plus puissante que celle qu'on désigne communément ainsi, est due à M. Laguerre. Elle s'énonce ainsi : Si N désigne la valeur absolue du plus grand coefficient négatif et $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ les coefficients positifs qui précèdent le premier coefficient négatif,

$$1 + \frac{N}{A_0 + A_1 + \dots + A_{p-1}}$$

est une limite supérieure des racines positives de l'équation.

Cela admis, posons

$$0 = f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots \\ + A_{p-1} x^{m-p+1} - A_p x^{m-p} + \dots + A_m,$$

et remarquons^o que l'équation

$$\varphi(x) = (x+1)f(x) = 0$$

aura les mêmes racines positives que la proposée. Or

$$\varphi(x) = A_0 x^{m+1} + (A_1 + A_0)x^m + \dots \\ + (A_{p-1} + A_{p-2})x^{m-p} + \dots,$$

et le plus grand coefficient négatif de φ est, dans le cas le plus défavorable qu'on puisse imaginer, $N + N'$, N et N' désignant les deux plus grands coefficients négatifs de f . Appliquons à l'équation φ la règle de M. Laguerre : le nombre

$$1 + \frac{N + N'}{2A_0 + 2A_1 + \dots + 2A_{p-2} + A_{p-1}}$$

sera une limite supérieure des racines positives de l'équation φ , et par suite de l'équation f .

Exemple. — Considérons l'équation

$$f = x^5 + q^2 x^4 + q x^3 - q^2 x^2 - x - 1 = 0,$$

dans laquelle nous supposerons $q = 100$, pour fixer les idées.

La règle de Maclaurin ordinaire donne une limite égale à

$$q^3 + 1 = 1000001;$$

la règle de Maclaurin perfectionnée,

$$q + 1 = 101;$$

celle de M. Laguerre,

$$1 + \frac{q^3}{q^2 + q + 1} = \frac{q^3 + q^2 + q + 1}{q^2 + q + 1} = q + \frac{1}{q^2 + q + 1},$$

c'est-à-dire $q + 1$, comme la précédente; enfin celle que nous proposons,

$$1 + \frac{q^3 + 1}{2q^2 + q + 2} = \frac{q^3 + 2q^2 + q + 3}{2q^2 + q + 2},$$

ou, en prenant le nombre entier supérieur,

$$\frac{q}{2} + 1 = 51.$$

Remarque. — L'exemple que nous avons choisi est un de ceux où notre méthode perfectionne la règle de M. Laguerre; mais il n'en est pas nécessairement et toujours ainsi. Par exemple, si $N = N'$, ce qui est, il est vrai, le cas le plus défavorable à notre règle, on reconnaît sans peine que celle-ci est en infériorité. Il y a supériorité toutes les fois que l'inégalité

$$\frac{N}{A_0 + \dots + A_{p-1}} > \frac{N'}{A_0 + \dots + A_{p-2}}$$

est satisfaite.