

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 524-527

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__524_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 1318

(voir 2^e série, t. XVIII, p. 528),

PAR M. FERDINANDO PISANI.

Trouver un nombre ayant la double propriété d'être égal à la somme des carrés de deux entiers consécutifs et à celle des carrés de trois entiers consécutifs.

(LIONNET.)

Soit X un nombre ayant la double propriété d'être égal à

$$u^2 + (u + 1)^2$$

et à

$$(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2;$$

on aura

$$2u^2 + 2u + 1 = 3x^2 + 2,$$

et par suite

$$\begin{aligned} 4u^2 + 4u + 2 &= 6x^2 + 4, \\ (2u + 1)^2 &= 6x^2 + 3. \end{aligned}$$

Le nombre $2u + 1$ étant multiple de 3, on aura, en

posant $2u + 1 = 3\gamma$,

$$9\gamma^2 = 6x^2 + 3,$$

$$3\gamma^2 = 2x^2 + 1,$$

ou

$$2x^2 - 3\gamma^2 = -1.$$

Le développement de $\sqrt{\frac{3}{2}}$ en fraction continue donne la fraction périodique mixte

$$1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

dont la période se compose des deux quotients incomplets 4, 2; les réduites successives sont

$$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{11}{9}, \frac{49}{40}, \frac{109}{89}, \frac{485}{396}, \frac{1079}{881}, \dots$$

Les numérateurs des réduites de rangs pairs sont les valeurs de x , et les dénominateurs de ces réduites les valeurs de γ ; on a ainsi

$$x = 1, 11, 109, 1079, \dots,$$

$$\gamma = 1, 9, 89, 881, \dots$$

Les valeurs correspondantes de u , déterminées par la relation $2u + 1 = 3\gamma$, sont

$$u = 1, 13, 133, 1321, \dots$$

Puis les équations

$$X = u^2 + (u + 1)^2 = (x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2$$

donnent

$$X = 1^2 + 2^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5,$$

$$X = 13^2 + 14^2 = 10^2 + 11^2 + 12^2 = 365,$$

$$X = 133^2 + 134^2 = 108^2 + 109^2 + 110^2 = 35645,$$

$$X = 1321^2 + 1322^2 = 1078^2 + 1079^2 + 1080^2 = 3492725,$$

.....,

et ainsi de suite.

La question admet donc une infinité de solutions.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Marcello Rochetti et Leinekugel.

Question 1333

(voir 2^e série, t. XVIII, p. 479);

PAR M. A. DROZ.

• *Étant donnée une spirale logarithmique, on trace la polaire du pôle de cette spirale par rapport à un cercle osculateur à la courbe : trouver l'enveloppe de toutes les polaires ainsi obtenues.* (LAISANT.)

Soient $\rho = ae^{m\varphi}$ l'équation d'une spirale logarithmique et O le pôle.

On sait que cette courbe a les propriétés suivantes :

1^o *Le rayon vecteur OM, mené à un point quelconque M de la courbe, fait avec la tangente en ce point un angle constant dont la tangente est $\frac{1}{m}$.*

2^o *Le centre C du cercle osculateur à la courbe au point M est à la rencontre de la normale au point M*

et de la perpendiculaire menée par le pôle au rayon vecteur OM⁽¹⁾.

3° La spirale logarithmique et sa podaire relative au pôle sont des courbes semblables dont le rapport de similitude est $\sqrt{1+m^2}$.

4° Le lieu géométrique de l'extrémité T de la sous-tangente OT est une spirale logarithmique dont le point O est le pôle et qui est semblable à la spirale $\rho = ae^{m\omega}$, le rapport de similitude étant $\frac{1}{m}$.

Remarquons maintenant que la polaire du point O par rapport au cercle osculateur dont C est le centre et CM le rayon s'obtient en élevant une perpendiculaire à la droite CT, à l'extrémité T de la sous-tangente. Il s'ensuit que la podaire par rapport à O de la courbe enveloppe cherchée est une spirale logarithmique; on en peut conclure que la courbe cherchée est elle-même une spirale logarithmique ayant le point O comme pôle.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez, Moret-Blanc, Fauquembergue, Leinekugel, L. Julliard, du lycée Corneille, à Rouen.