

A. LEINEKUGEL

**Questions proposées au concours
d'admission à l'École spéciale
militaire (1879)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 513-517

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__513_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS D'ADMISSION
A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1879);**

SOLUTION DE M. A. LEINEKUGEL,
Étudiant en Mathématiques.

I. *Un cylindre et un cône droits à bases circulaires ont les surfaces égales et les volumes égaux. La hauteur est donnée, et l'on demande de calculer les rayons des bases.*

Soient h la hauteur donnée, x et y les rayons des bases du cylindre et du cône; les équations du problème sont

$$(1) \quad 2\pi x^2 + 2\pi hx = \pi y^2 + \pi y \sqrt{h^2 + y^2},$$

$$(2) \quad \pi x^2 h = \frac{\pi y^2 h}{3}.$$

De la dernière on tire

$$y = x\sqrt{3},$$

et la première devient, en remplaçant y par $x\sqrt{3}$, et supprimant la solution $x = 0$, qui correspond au cas particulier où le cylindre et le cône se réduisent à la hauteur donnée h ,

$$(3) \quad 2h - x = \sqrt{3} \sqrt{h^2 + 3x^2},$$

d'où, en élevant au carré,

$$8x^2 + 4hx - h^2 = 0,$$

équation qui donne

$$x_1 = \frac{h(\sqrt{3} - 1)}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{h(\sqrt{3} + 1)}{4}.$$

Les valeurs correspondantes de y sont

$$y_1 = \frac{h(3 - \sqrt{3})}{4} \quad \text{et} \quad y_2 = -\frac{h(\sqrt{3} + 3)}{4}.$$

Les valeurs x_1, y_1 , qui sont positives, conviennent seules au problème; les valeurs négatives ont été introduites par l'élévation au carré de l'équation (3); prises en valeurs absolues, elles donnent la solution du problème suivant :

Un cylindre et un cône droits à bases circulaires ont des volumes égaux et même hauteur h ; les différences entre les surfaces latérales et les surfaces des bases sont égales; calculer les rayons des bases.

II. Dans un triangle ABC on donne les côtés AB et AC, et l'on sait que la base BC est égale à la hauteur : on demande de calculer l'angle A.

Soient a, b, c les côtés du triangle. La base BC ou a

étant supposée égale à la hauteur qui lui correspond, le double de l'aire du triangle aura pour valeur a^2 ; la même surface a pour expression $bc \sin A$; donc $bc \sin A = a^2$, ou, parce que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, on aura

$$(1) \quad bc \sin A = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\sin A + 2 \cos A = \frac{b^2 + c^2}{bc}.$$

Désignons par φ un angle aigu tel que $\tan \varphi = 2$; en remplaçant, dans l'équation (1), 2 par $\tan \varphi$, ou $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$, il viendra

$$\sin A \cos \varphi + \cos A \sin \varphi = \left(\frac{b^2 + c^2}{bc} \right) \cos \varphi,$$

ou

$$(2) \quad \sin(A + \varphi) = \frac{b^2 + c^2}{bc} \cos \varphi.$$

Discussion. — $\sin(A + \varphi)$ ayant pour limites $+1$ et -1 , il faut qu'on ait $\frac{(b^2 + c^2)^2}{b^2 c^2} \cos^2 \varphi \leq 1$ pour que l'angle $A + \varphi$ existe.

Mais $\tan \varphi = 2$ donne $\cos^2 \varphi = \frac{1}{5}$; d'où

$$\frac{(b^2 + c^2)^2}{b^2 c^2} \cos^2 \varphi = \frac{(b^2 + c^2)^2}{5 b^2 c^2} \leq 1$$

et

$$(b^2 + c^2)^2 - 5 b^2 c^2 \leq 0.$$

Or,

$$(b^2 + c^2)^2 - 5 b^2 c^2 = (b^2 + c^2 + bc \sqrt{5})(b^2 + c^2 - bc \sqrt{5});$$

on aura donc

$$b^2 + c^2 - bc \sqrt{5} \leq 0$$

ou

$$(3) \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \sqrt{5} \leq 0.$$

En posant $\frac{b}{c} = r$, la relation (3) devient

$$r + \frac{1}{r} - \sqrt{5} \leq 0,$$

$$r^2 - r\sqrt{5} + 1 \leq 0;$$

d'où

$$\left[r - \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) \right] \left[r - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) \right] \leq 0;$$

par suite,

$$r \leq \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad \text{et} \quad r \geq \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

ce qui revient à

$$(4) \quad \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \geq \frac{b}{c} \geq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Donc, pour que le triangle ABC existe, il faudra que le rapport $\frac{b}{c}$ des deux côtés donnés soit compris entre $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ et $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, ou bien égal à l'une de ces deux quantités.

Dans le premier cas, l'équation (2)

$$\sin(A + \varphi) = \left(\frac{b^2 + c^2}{bc} \right) \cos \varphi$$

donnera généralement pour l'angle A deux valeurs positives moindres chacune que 180°.

En effet, désignons par α le plus petit des angles ayant pour sinus $\frac{b^2 + c^2}{bc} \cos \varphi$; l'angle φ étant aigu, $\cos \varphi$ est positif, et il en est de même de $\frac{b^2 + c^2}{bc} \cos \varphi$; ainsi α est, comme φ , un angle aigu. En outre, en supposant les côtés donnés b, c inégaux, on aura $\alpha > \varphi$, parce que de

l'inégalité $b \geq c$ résulte $\frac{b^2 + c^2}{bc} > 2$, d'où

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} \cos \varphi > 2 \cos \varphi, \quad \sin x > \tan \varphi \cos \varphi, \quad \sin x > \sin \varphi.$$

Or, d'après les formules générales des angles ayant pour

sinus $\frac{b^2 + c^2}{bc} \cos \varphi$, on a

$$A + \varphi = 2k\pi + \alpha \quad \text{et} \quad A + \varphi = (2k + 1)\pi - \alpha,$$

$$A = 2k\pi + \alpha - \varphi, \quad A = (2k + 1)\pi - \alpha - \varphi,$$

et, en faisant $k = 0$,

$$A = \alpha - \varphi \quad \text{et} \quad A = \pi - (\alpha + \varphi),$$

valeurs positives et moindres que 180° .