

MORET-BLANC

Questions proposées par M. Moreau

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 450-454

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__450_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. MOREAU

(voir 2^e série, t. XIV, p. 527);

SOLUTIONS DE M. MORET-BLANC.

Démontrer les formules

$$\begin{aligned}
 1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\right]^2 \\
 + \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right]^2 + \dots = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma^2(n+1)}, \\
 1 - \left(\frac{n}{1}\right)^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\right]^2 \\
 - \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right]^2 + \dots = \cos \frac{n\pi}{2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \\
 1 - \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1)}{1^2 \cdot 2^2} \\
 - \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots = \frac{\sin n\pi}{n\pi},
 \end{aligned}$$

et indiquer entre quelles limites elles sont exactes.

1° Si l'on développe $(1+x)^{2n}$ par la formule du bi-

nôme, le coefficient de x^μ dans ce développement sera

$$\frac{2n(2n-1)\dots(2n-\mu+1)}{1\ 2\dots\mu}$$

ou, en multipliant haut et bas par $\Gamma(2n-\mu+1)$,

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(2n-\mu+1)}.$$

Si l'on développe $(x+1)^{2n}$, le coefficient de $x^{2n-\mu}$ sera de même

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n-\mu+1)\Gamma(\mu+1)}.$$

En posant $2n-\mu=\mu'$, le coefficient de $x^{\mu'}$ sera donc

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(\mu'+1)\Gamma(2n-\mu'+1)}.$$

Si n est fractionnaire, μ sera toujours entier, mais μ' sera fractionnaire, et, comme le coefficient est toujours la même fonction de n et de μ , cette forme subsiste pour les puissances entières ou fractionnaires, pourvu que les exposants successifs de x diffèrent d'une unité. Il en résulte que, si x^n se trouve dans le développement, son coefficient sera

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma^2(n+1)}.$$

Or, ce terme en x^n s'obtient en faisant la somme des produits des termes de même rang dans les développements de $(1+x)^n$ et $(x+1)^n$, ce qui donne le premier membre de la première formule : cette formule est donc démontrée.

Il faut toutefois que $\Gamma(2n+1)$ reste fini et positif, ce qui exige que l'on ait $2n+1 > 0$ ou $n > -\frac{1}{2}$.

2° Le coefficient de x^μ dans le développement de

$(1 - x^2)^n$ est, en valeur absolue,

$$\frac{n(n-1) \dots \left(n - \frac{\mu}{2} + 1\right)}{1 \cdot 2 \dots \frac{\mu}{2}} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + 1\right) \Gamma\left(n - \frac{\mu}{2} + 1\right)}$$

si μ est pair; il est nul si μ est un nombre impair.

On verra, comme précédemment, que cette forme subsiste pour des valeurs fractionnaires de n .

Si $\mu = n$, c'est-à-dire si le développement renferme un terme en x^n , son coefficient sera égal à $\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$,

multiplié par une fonction de n qui s'annule pour les valeurs impaires de n et prend les valeurs $+1$ ou -1 pour les valeurs entières paires ou impaires de $\frac{n}{2}$, conditions qui sont remplies par la fonction $\cos \frac{n\pi}{2}$. Le terme en x^n sera donc

$$\cos \frac{n\pi}{2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Mais on l'obtient aussi en faisant la somme des produits des termes de même rang dans les développements de $(x+1)^n$ et $(1-x)^n$, ce qui donne pour coefficient le premier membre de la seconde formule; on a donc

$$1 - \left(\frac{n}{1}\right)^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\right]^2 - \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right]^2 + \dots = \cos \frac{n\pi}{2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Il faut toutefois que $\Gamma(n+1)$ reste continu ou que l'on ait $n > -1$.

L'égalité existe évidemment pour toutes les valeurs entières et positives de n ; mais ce n'est que par analogie, et en vertu de la continuité, qu'on l'a étendue aux valeurs fractionnaires. Il faut vérifier qu'elle subsiste pour celles-ci.

Soit $n = \frac{1}{2}$. Le second membre de la formule devient

$$\begin{array}{rcl} & \cos \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma^2(1 + \frac{1}{4})}, & \\ \log \cos \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots & \bar{1},8498450 & \\ \log \Gamma(\frac{3}{2}) \dots\dots\dots & \bar{1},9475449 & \\ - 2 \log \Gamma(\frac{5}{4}) \dots\dots\dots & \underline{0,0853578} & \\ \log \cos \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma^2(\frac{5}{4})} \dots\dots & \bar{1},8827477 & \\ \cos \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma^2(\frac{5}{4})} \dots\dots & 0,763392. & \end{array}$$

C'est aussi la valeur que prend le premier membre quand on y fait $n = \frac{1}{2}$.

La formule subsiste donc pour les valeurs fractionnaires de n .

3° Si l'on développe $\left(\frac{1+x}{1+x}\right)^n$ en série ordonnée suivant les puissances de x , il est évident que le coefficient de x^μ sera égal à zéro pour toutes les valeurs entières positives ou négatives de μ , et qu'il se réduira à 1 pour $\mu = 0$.

Or

$$\left(\frac{1+x}{1+x}\right)^n = (x+1)^n (1+x)^{-n},$$

et l'on obtiendra le coefficient de x^n dans ce développement en multipliant les coefficients des termes de même rang dans les développements de $(x+1)^n$ et de $(1+x)^{-n}$

par la formule du binôme, ce qui donne

$$1 - \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1)}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots,$$

valeur qui se réduit à l'unité pour $n = 0$ et à zéro pour toute valeur entière positive ou négative de n ; elle est donc égale à

$$(1-n^2) \left(1 - \frac{n^2}{4}\right) \left(1 - \frac{n^2}{9}\right) \left(1 - \frac{n^2}{16}\right) \dots$$

Or on a (SERRET, *Trigonométrie*, n° 134)

$$\sin \frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n} \left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{16n^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{36n^2}\right) \dots,$$

d'où, en remplaçant $\frac{m}{2n}$ par n ,

$$\frac{\sin n\pi}{n\pi} = (1-n^2) \left(1 - \frac{n^2}{4}\right) \left(1 - \frac{n^2}{9}\right) \left(1 - \frac{n^2}{16}\right) \dots$$

Donc

$$1 - \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1)}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots = \frac{\sin n\pi}{n\pi}.$$