

MORET-BLANC

Questions proposées par M. H. Faure

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 411-421

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__411_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. H. FAURE

(voir 2^e série, t. XIV, p. 479);

PAR M. MORET-BLANC.

I. *Une surface de second degré étant coupée par un plan P, désignons par D le diamètre parallèle à la tangente en un point quelconque de la section, par p la distance du centre de la surface au plan tangent en ce point et par α l'angle que forme ce plan tangent avec le plan P.*

1° *Pour tout point de la section,*

$$\frac{pD}{\sin \alpha} = \text{const.}$$

2° *La constante conserve la même valeur lorsque le*

plan P roule sur une surface homofocale à la surface donnée.

1° Soient

$$(1) \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$$

l'équation de la surface et

$$(2) \quad ax + by + cz = d$$

celle du plan sécant, d étant la distance du centre de la surface à ce plan, et a, b, c les cosinus des angles que la normale au plan fait avec les axes.

Les coordonnées des extrémités du diamètre parallèle à la tangente au point (x, y, z) de la section sont données par les équations

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1,$$

$$aX + bY + cZ = 0,$$

$$X \cos \lambda + Y \cos \mu + Z \cos \nu = 0,$$

λ, μ, ν étant les angles que fait avec les axes la normale à la section au point considéré.

On en tire

$$X^2 = \frac{(b \cos \nu - c \cos \mu)^2}{\frac{(b \cos \nu - c \cos \mu)^2}{A} + \frac{(c \cos \lambda - a \cos \nu)^2}{B} + \frac{(a \cos \mu - b \cos \lambda)^2}{C}},$$

$$Y^2 = \frac{(c \cos \lambda - a \cos \nu)^2}{\frac{(b \cos \nu - c \cos \mu)^2}{A} + \frac{(c \cos \lambda - a \cos \nu)^2}{B} + \frac{(a \cos \mu - b \cos \lambda)^2}{C}},$$

$$Z^2 = \frac{(a \cos \mu - b \cos \lambda)^2}{\frac{(b \cos \nu - c \cos \mu)^2}{A} + \frac{(c \cos \lambda - a \cos \nu)^2}{B} + \frac{(a \cos \mu - b \cos \lambda)^2}{C}},$$

et par suite

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{4} &= X^2 + Y^2 + Z^2 \\ &= \frac{(a \cos \mu - b \cos \lambda)^2 + (c \cos \lambda - a \cos \nu)^2 + (b \cos \nu - c \cos \mu)^2}{\frac{(b \cos \nu - c \cos \mu)^2}{A} + \frac{(c \cos \lambda - a \cos \nu)^2}{B} + \frac{(a \cos \mu - b \cos \lambda)^2}{C}} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\frac{(b \cos \nu - c \cos \mu)^2}{A} + \frac{(c \cos \lambda - a \cos \nu)^2}{B} + \frac{(a \cos \mu - b \cos \lambda)^2}{C}}. \end{aligned}$$

Or,

$$\cos \lambda = p \frac{x}{A}, \quad \cos \mu = p \frac{y}{B}, \quad \cos \nu = p \frac{z}{C},$$

en remplaçant $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ par leurs valeurs, et multipliant haut et bas dans le second membre par $A^2 B^2 C^2$, on a

$$(3) \left\{ \begin{aligned} &\frac{p^2 D^2}{4 \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{A^2 B^2 C^2}{A(Bbx - Ccy)^2 + B(Ccx - Aaz)^2 + C(Aay - Bbx)^2}. \end{aligned} \right.$$

On tire de l'équation (2)

$$x = \frac{d - by - cz}{a},$$

et, en reportant cette valeur dans l'équation (1), il vient

$$\begin{aligned} &C(Aa^2 + Bb^2)y^2 - 2BCb(d - cz)y \\ &+ B(Aa^2 + Cc^2)z^2 - 2BCcdz + BC(d^2 - Ca^2) = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} y &= \frac{BCab(d - cz) \pm aR}{Ca(Aa^2 + Bb^2)}, \\ x &= \frac{ACa^2(d - cz) \mp bR}{Ca(Aa^2 + Bb^2)}. \end{aligned}$$

En portant ces valeurs de x et y dans la relation (3),

z disparaît, et l'on a

$$(4) \quad \frac{p^2 D^2}{4 \sin^2 \alpha} = \frac{ABC}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 - d^2},$$

ou

$$\frac{pD}{\sin \alpha} = 2 \sqrt{\frac{ABC}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 - d^2}},$$

valeur constante.

2° Soit

$$\frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'} = 1$$

l'équation d'une surface homofocale à la surface (1).

On a la relation

$$A - A' = B - B' = C - C'.$$

L'équation du plan tangent à cette surface est

$$\frac{Xx}{A'} + \frac{Yy}{B'} + \frac{Zz}{C'} = 1.$$

On identifiera ce plan avec le plan (2) en posant

$$a = \frac{dx}{A'}, \quad b = \frac{dy}{B'}, \quad c = \frac{dz}{C'}$$

et

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{A'^2} + \frac{y^2}{B'^2} + \frac{z^2}{C'^2}}}.$$

La relation (3) devient alors

$$\begin{aligned} \frac{p^2 D^2}{4 \sin^2 \alpha} &= \frac{ABC}{d^2 \left(A \frac{x^2}{A^2} + B \frac{y^2}{B^2} + C \frac{z^2}{C^2} - 1 \right)} \\ &= \frac{ABC \left(\frac{x^2}{A'^2} + \frac{y^2}{B'^2} + \frac{z^2}{C'^2} \right)}{A \frac{x^2}{A'^2} + B \frac{y^2}{B'^2} + C \frac{z^2}{C'^2} - \left(\frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'} \right)} = \frac{ABC}{A - A'}, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{pD}{\sin \alpha} = 2\sqrt{\frac{ABC}{A-A'}}.$$

Donc la constante ne change pas quand le plan P roule sur une surface homofocale à la surface donnée.

II. On donne trois surfaces du second degré homofocales. Une droite ϵ touchant les deux premières coupe la troisième A au point a . Si le plan tangent au point a rencontre au point m la parallèle Om menée à ϵ par le centre O de A, Om a une longueur constante quelle que soit la droite ϵ .

Soient

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

$$\frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'} = 1,$$

$$\frac{x^2}{A''} + \frac{y^2}{B''} + \frac{z^2}{C''} = 1$$

les équations des trois surfaces, avec les relations

$$(\alpha) \quad \begin{cases} A' - A = B' - B = C' - C = k \\ A'' - A' = B'' - B' = C'' - C' = k', \end{cases}$$

exprimant qu'elles sont homofocales.

Soient

$$x = mz + p,$$

$$y = nz + q$$

les équations de la droite ϵ . Les conditions pour qu'elle touche les deux premières surfaces sont exprimées par

$$Aq^2 + Bp^2 + C(mq - np)^2 = BCm^2 + ACn^2 + AB,$$

$$A'q^2 + B'p^2 + C'(mq - np)^2 = B'C'm^2 + A'C'n^2 + A'B'.$$

Les coordonnées de ses intersections avec la troisième

sont

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{A''(C''m^2p - C''mnq + B''p) \pm mR}{B''C''m - A''C''n - A''B''}, \\y_1 &= \frac{B''(C''m^2q - C''mnp + A''q) \pm nR}{B''C''m^2 + A''C''n^2 + A''B''}, \\z_1 &= \frac{-C''(B''mp + A''nq) \pm R}{B''C''m + A''C''n + A''B''},\end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$R = \sqrt{A''B''C''[B''C''m^2 + A''C''n + A''B'' - A''q^2 - B''p^2 - C''(mq - np)^2]}.$$

L'équation du plan tangent à la troisième surface au point (x, y, z) est

$$\frac{x_1}{A''}X + \frac{y_1}{B''}Y + \frac{z_1}{C''}Z = 1,$$

et celles de la parallèle à ε menée par le centre sont

$$X = mZ,$$

$$Y = nZ.$$

On en déduit les coordonnées du point m d'intersection

$$X_1 = \frac{m}{\frac{m x_1}{A''} + \frac{n y_1}{B''} + \frac{z_1}{C''}},$$

$$Y_1 = \frac{n}{\frac{m x_1}{A''} + \frac{n y_1}{B''} + \frac{z_1}{C''}},$$

$$Z_1 = \frac{1}{\frac{m x_1}{A''} + \frac{n y_1}{B''} + \frac{z_1}{C''}},$$

d'où

$$\begin{aligned}\overline{Om}^2 &= X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 \\&= \frac{m^2 + n^2 + 1}{\left(\frac{m x_1}{A''} + \frac{n y_1}{B''} + \frac{z_1}{C''}\right)^2} \\&= \frac{A''^2 B''^2 C''^2 (m^2 + n^2 + 1)}{(B''C''m x_1 + A''C''n y_1 + A''B'')^2},\end{aligned}$$

et, en remplaçant x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs,

$$\overline{Om}^2 = \frac{A'' B'' C'' (m^2 + n^2 + 1)}{B'' C'' m^2 + A'' C'' n^2 + A'' B'' - A'' q^2 - B'' p^2 - C'' (mq - np)^2}.$$

Posons

$$B'' C'' m^2 + A'' C'' n^2 + A'' B'' - A'' q^2 - B'' p^2 - C'' (mq - np)^2 = S;$$

si l'on résout les trois équations

$$A q^2 + B p^2 + C (mq - np)^2 = B C m^2 + A C n^2 + A B,$$

$$A' q^2 + B' p^2 + C' (mq - np)^2 = B' C' m^2 + A' C' n^2 + A' B',$$

$$A'' q^2 + B'' p^2 + C'' (mq - np)^2 = B'' C'' m^2 + A'' C'' n^2 + A'' B'' - S,$$

par rapport aux variables q^2, p^2 et $(mq - np)^2$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ k & k & k \\ k' & k' & k' \end{vmatrix} = k k' \begin{vmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

donc, puisque p^2, q^2 et $(mq - np)^2$ admettent des valeurs différentes de zéro, il faut que les numérateurs soient nuls, et par suite que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B & BCm^2 + ACn^2 + AB \\ A' & B' & B'C'm^2 + A'C'n^2 + A'B' \\ A'' & B'' & B''C''m^2 + A''C''n^2 + A''B'' - S \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} S(AB' - BA') &= (BCm^2 + ACn^2 + AB)(A'B'' - B'A'') \\ &\quad - (B'C'm^2 + A'C'n^2 + A'B')(AB'' - BA'') \\ &\quad + (B''C''m^2 + A''C''n^2 + A''B'')(AB' - BA') \end{aligned}$$

et, en simplifiant au moyen des relations (α) ,

$$S = (k + k') k' (m^2 + n^2 + 1) = (A'' - A)(A'' - A')(m^2 + n^2 + 1).$$

La valeur de $\overline{Om}^2$ devient donc

$$\overline{Om}^2 = \frac{A''B''C''}{(A'' - A)(A'' - A')}$$

ou

$$Om = \sqrt{\frac{A''B''C''}{(A'' - A)(A'' - A')}} ,$$

valeur constante.

C. Q. F. D.

III. *Par un point d'une surface du second degré, on mène trois plans rectangulaires A, B, C. Si l'on désigne par α, β, γ les rayons de courbure des trois sections en ce point, et par T le plan tangent en ce même point,*

$$-\frac{\sin^3 TA}{\alpha} + \frac{\sin^3 TB}{\beta} + \frac{\sin^3 TC}{\gamma} = \text{const.} \quad (1).$$

Prenons les trois plans sécants pour plans des coordonnées, et soit

$$\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 - A''z^2 + 2B'yz + 2B'zx + 2B''xy \\ - 2Cx + 2C'y - 2C''z = 0 \end{aligned}$$

l'équation de la surface.

Celle du plan tangent à l'origine est

$$Cx + C'y + C''z = 0.$$

Les sinus des angles que ce plan fait avec les trois plans A, B, C sont respectivement

$$\frac{\sqrt{C^2 + C'^2}}{\sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2}}, \quad \frac{\sqrt{C^2 + C''^2}}{\sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2}}, \quad \frac{\sqrt{C'^2 + C''^2}}{\sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2}}.$$

En faisant $z = 0$ dans l'équation de la surface, on a

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y = 0,$$

équation de la section faite par le plan A.

(1) C'est par erreur que dans l'énoncé les exposants des sinus ont été affectés du signe —.

(419)

On en déduit, pour $x = 0$, $y = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{C}{C'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2B''CC' - (AC'^2 + A'C^2)}{C'^3},$$

et par suite

$$\alpha = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(C^2 + C'^2)^{\frac{3}{2}}}{C^3(AC'^2 + A'C^2 - 2B''CC')},$$

$$\frac{\sin^3 AT}{\alpha} = \frac{AC'^2 + A'C^2 - 2B''CC'}{(C^2 + C'^2 + C''^2)^2}.$$

On trouve de même

$$\frac{\sin^3 BT}{\beta} = \frac{AC''^2 + A''C^2 - 2B'CC''}{(C^2 + C'^2 + C''^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\sin^3 CT}{\gamma} = \frac{A'C''^2 + A''C'^2 - 2BC'C''}{(C^2 + C'^2 + C''^2)^2}.$$

Par suite,

$$\frac{\sin^3 AT}{\alpha} + \frac{\sin^3 BT}{\beta} + \frac{\sin^3 CT}{\gamma} = \frac{(A^2 + A'^2 + A''^2)C^2 + C'^2 + C''^2 - (AC'^2 + A'C^2 + A''C''^2 + 2BC'C'' + 2B'CC'' + 2B''CC')}{(C^2 + C'^2 + C''^2)^2}.$$

On sait que, dans la transformation orthogonale, $A + A' + A''$ et $C^2 + C'^2 + C''^2$ sont des invariants; il faut vérifier que

$$AC^2 + A'C'^2 + A''C''^2 + 2BC'C'' + 2B'CC'' + 2B''CC'$$

est aussi un invariant.

Les formules de transformation pour passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires sont

$$x = ax' + a'y' + a''z',$$

$$y = bx' + b'y' + b''z',$$

$$z = cx' + c'y' + c''z',$$

avec les relations connues

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad aa' + bb' + cc' = 0, \\ \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots, \\ a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

En distinguant par l'indice 1 les coefficients de l'équation transformée, on a

$$\begin{aligned} A_1 &= Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ac + 2B''ab, \\ A'_1 &= Aa'^2 + A'b'^2 + A''c'^2 + 2Bb'c' + 2B'a'c' + 2B''a'b', \\ A''_1 &= Aa''^2 + A'b''^2 + A''c''^2 + 2Bb''c'' + 2B'a''c'' + 2B''a''b'', \\ B_1 &= Aa'a'' + A'b'b'' + A''c'c'' \\ &\quad + B(b'c'' + c'b'') + B'(c'a'' + a'c'') + B''(a'b'' + b'a''), \\ B'_1 &= Aaa'' + A'bb'' + A''cc'' \\ &\quad + B(bc'' + cb'') + B'(ca'' + ac'') + B''(ab'' + ba''), \\ B''_1 &= Aaa' + A'bb' + A''cc' \\ &\quad + B(bc' + cb') + B'(ca' + ac') + B''(ab' + ba'), \\ C_1 &= Ca + C'b + C''c, \\ C'_1 &= Ca' + C'b' + C''c', \\ C''_1 &= Ca'' + C'b'' + C''c'', \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} C_1^2 &= C^2a^2 + C'^2b^2 + C''^2c^2 + 2CC'ab + 2CC''ac + 2C'C''bc, \\ C_1'^2 &= C^2a'^2 + \dots, \\ C_1''^2 &= C^2a''^2 + \dots, \\ C_1C'_1 &= C^2aa' + C'^2bb' + C''^2cc' \\ &\quad + CC'(ab' + ba') + CC''(ac' + ca') + C'C''(ab' + ba'), \\ C_1C''_1 &= C^2aa'' + \dots, \\ C'_1C''_1 &= C^2a'a'' + \dots \end{aligned}$$

Au moyen de ces valeurs, et en ayant égard aux rela-

tions (α), on vérifie que

$$\begin{aligned} A_1 + A'_1 + A''_1 &= A + A' + A'', \\ C_1^2 + C'^2_1 + C''^2_1 &= C^2 + C'^2 + C''^2, \\ A_1 C_1^2 + A'_1 C'^2_1 + A''_1 C''^2_1 + 2 B_1 C'_1 C''_1 + 2 B'_1 C_1 C''_1 + 2 B''_1 C_1 C'_1 \\ &= AC^2 + A'C'^2 + A''C''^2 + 2 BC'C'' + 2 B'CC'' + 2 B''CC'. \end{aligned}$$

Cette fonction des coefficients est donc aussi un invariant, ce qui démontre le théorème.