

CHÉFIK-BEY

**Solution des exercices sur le tétraèdre
proposés par M. Genty**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 403-411

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__403_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DES EXERCICES SUR LE TÉTRAÈDRE
PROPOSÉS PAR M. GENTY**

(voir 2^e série, t. XVII, p. 223);

PAR M. CHÉFIK-BEY (DU CAIRE).

1. *Si dans un tétraèdre les arêtes opposées sont égales, on peut dire que ce tétraèdre est isoscèle. Les quatre faces d'un pareil tétraèdre sont égales.*

En effet, soit SABC le tétraèdre. Je dis que, par exemple, la face SAB est égale à la face ABC. En effet, AB est commun, $AC = SB$ et $BC = SA$ d'après l'hypothèse.

2. *Soient a, b, c les côtés de l'un de ces triangles, A, B, C les angles. Soient de plus α, β, γ les médianes qui joignent les milieux des côtés a, b, c aux milieux des côtés opposés du tétraèdre. On a*

$$\alpha^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = c^2,$$

$$\beta^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}, \quad \alpha^2 + \gamma^2 = b^2,$$

$$\gamma^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}, \quad \beta^2 + \gamma^2 = a^2.$$

Désignons par M et N les milieux de SB et de AC ;

MN est une médiane du triangle AMC, et l'on a

$$\overline{MN}^2 = \beta^2 = \frac{1}{2} \left(\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - \frac{1}{2} b^2 \right).$$

Or

$$\overline{AM}^2 = \frac{1}{2} \left(a'^2 + c^2 - \frac{1}{2} b^2 \right),$$

$$\overline{MC}^2 = \frac{1}{2} \left(a'^2 + c^2 - \frac{1}{2} b^2 \right),$$

donc

$$\beta^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}.$$

On trouverait de même α^2 et γ^2 .

Ajoutant deux à deux α^2 , β^2 et γ^2 , on trouve

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2, \quad b^2 = \alpha^2 + \gamma^2, \quad c^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

C. Q. F. D.

3. Les médianes sont en même temps les plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre, et forment un trièdre trirectangle.

Des valeurs de AM et MC il résulte que le triangle AMC est isocèle; MN est donc perpendiculaire sur AC. On verrait de même que MN est perpendiculaire sur SB; donc MN est la plus courte distance de AC et de SB.

Soient P et Q les milieux de SC et AB. On voit que

$$MP = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AS = MQ = PN = QN,$$

et MP est parallèle à QN. Par conséquent, MPNQ est un losange, et MN, PQ se coupent à angle droit.

On démontrerait de la même manière, en désignant par V, R les milieux de SA, BC, que VR et PQ sont perpendiculaires, ainsi que MN et VR. Donc les médianes forment un trièdre trirectangle.

4. Les angles dièdres opposés du tétraèdre sont égaux deux à deux, et, si φ, ψ, θ sont les angles dièdres qui ont pour arêtes les côtés a, b, c , on a

$$\frac{\sin \varphi}{a} = \frac{\sin \psi}{b} = \frac{\sin \theta}{c},$$

et par suite

$$\frac{\sin \varphi}{\sin A} = \frac{\sin \psi}{\sin B} = \frac{\sin \theta}{\sin C}.$$

Je mène par AC, SB les plans ACK et SLB, perpendiculaires à SB et AC. Les triangles ACK, SLB sont égaux; cela résulte de l'égalité des triangles SCB, SAC et des côtés SB et AC. Les angles K et L qui mesurent les dièdres SB et AC sont donc égaux.

Par le sommet S, je mène des plans perpendiculaires aux arêtes opposées. Soient G le point où leur intersection perce la base ABC et D, E, F les points où ils coupent les arêtes BC, AB, AC.

On a

$$SG = SD \sin \text{SDG} \quad \text{et} \quad SG = SE \sin \text{SEG}.$$

Mais

$$SD = SB \sin \text{SBC}, \quad SE = SB \sin \text{SBA};$$

donc

$$\sin \text{SBC} \sin \text{SDG} = \sin \text{SEG} \sin \text{SBA}$$

ou

$$\sin C \sin \varphi = \sin A \sin \theta,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sin \varphi}{\sin A} = \frac{\sin \theta}{\sin C} = \frac{\sin \psi}{\sin B}.$$

Or

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c};$$

donc

$$\frac{\sin \varphi}{a} = \frac{\sin \theta}{c} = \frac{\sin \psi}{b}.$$

C. Q. F. D.*

5. Si V est le volume du tétraèdre, on a

$$V = \frac{\alpha\beta\gamma}{3};$$

on a aussi

$$V = \frac{abc}{3} \sqrt{\cos A \cos B \cos C}.$$

Je construis sur les arêtes SA , SB , SC un parallélépipède; son volume sera donné par la formule connue

$$V = 2abc \sqrt{\sin \frac{A+B+C}{2} \sin \frac{A+B-C}{2} \sin \frac{A+C-B}{2} \sin \frac{B+C-A}{2}}.$$

Si l'on remarque que le tétraèdre est le sixième de ce solide et que $A + B + C = 180^\circ$, on trouve, tout calcul fait,

$$V = \frac{abc}{3} \sqrt{\cos A \cos B \cos C}.$$

C. Q. F. D.

Si nous remplaçons dans cette expression $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ par $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ et $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, il vient, en tenant compte des formules du n° 2,

$$V = \frac{\alpha\beta\gamma}{3}.$$

C. Q. F. D.

6. Si S est l'aire d'une des faces du tétraèdre, on a

$$S = \frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2}}{2},$$

et on a donc

$$\begin{aligned} & \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 \\ &= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4}. \end{aligned}$$

On sait que

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)},$$

qui devient, en élevant au carré,

$$16S^2 = [(a+c)^2 - b^2][2ac - (a^2 + c^2 - b^2)],$$

et, effectuant les calculs dans le premier crochet, on trouve

$$16S^2 = 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)$$

ou bien

$$4S^2 = (\gamma^2 + \beta^2)(\beta^2 + \gamma^2) - \beta^4,$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{\sqrt{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2}}{2}.$$

C. Q. F. D.

Égalant la première valeur de S et celle-ci, on obtient

$$\begin{aligned} & \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 \\ &= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4}. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

7. *Le point d'intersection des médianes, qui est le centre de gravité du tétraèdre, est en même temps le centre des sphères inscrite et circonscrite.*

Soit H le centre de gravité du triangle ABC. Joignons SH. Je dis que cette droite rencontre MN au point O et que $OH = \frac{1}{4} SH$, ce qui veut dire que O est le centre de gravité de SABC.

En effet, menons de M une parallèle à SH; soit I son point de rencontre avec NHB. Nous aurons $BI = IH$ et par conséquent $= NH$.

Donc

$$MO = NO.$$

C. Q. F. D.

On a de même

$$MI = \frac{1}{2} SH \quad \text{et} \quad OH = \frac{1}{2} MI,$$

par conséquent,

$$OH = \frac{1}{4} AH.$$

Le point O est donc bien le centre de gravité de la pyramide.

C. Q. F. D.

On a vu que

$$MA = MC \quad \text{et} \quad NA = NC;$$

il en résulte

$$OA = OC.$$

De même,

$$OS = OB.$$

Donc O est le centre de la sphère circonscrite.

C. Q. F. D.

Soient K et T les projections de O sur les faces ABC, SBC; elles sont les centres des cercles circonscrits à ces deux faces; par suite, KQ, TP sont perpendiculaires sur AB et SC, et l'on a

$$KQ = TP.$$

Mais

$$OQ = OP;$$

les triangles rectangles OKQ, OTP sont donc égaux; dès lors

$$OK = OT.$$

Le point O est donc également distant des quatre faces du tétraèdre.

C. Q. F. D.

On a, pour le rayon de la sphère circonscrite,

$$r^2 = \overline{OC}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{CN}^2.$$

Mais

$$ON = \frac{1}{2} a \quad \text{et} \quad CN = \frac{1}{2} b,$$

donc

$$r^2 = \frac{\beta^2 + b^2}{4},$$

ou, en remplaçant b^2 par $\alpha^2 + \gamma^2$,

$$r^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4}.$$

Remplaçant b^2 par $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$, il vient

$$r^2 = \frac{\alpha^2 + b^2 + c^2}{8}.$$

De même, pour le rayon de la sphère inscrite,

$$R^2 = \overline{OK}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{KC}^2;$$

KC étant le rayon du cercle circonscrit à ABC, on a

$$KC = \frac{abc}{4S},$$

et par suite

$$R^2 = r^2 - \frac{\alpha^2 b^2 c^2}{16S^2},$$

ou bien

$$R^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \gamma^2)}{4(\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \gamma^2)},$$

et, réduisant,

$$R^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{4(\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \gamma^2)}.$$

On tire des formules du n° 5

$$\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 = a^2 b^2 c^2 \cos A \cos B \cos C,$$

et, en vertu de cette égalité et de la deuxième du n° 6, la dernière formule devient

$$R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 \cos A \cos B \cos C}{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

8. *Tous les angles plans d'un tétraèdre isoscèle sont nécessairement aigus.*

Cela résulte de la formule

$$V = \frac{abc}{3} \sqrt{\cos A \cos B \cos C}.$$

9. *Si l'on désigne par P la puissance d'un sommet du tétraèdre par rapport à la sphère inscrite, on a*

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2 b^2 c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} \\ &= \frac{(\beta^2 + \gamma^2)(\gamma^2 + \alpha^2)(\alpha^2 + \beta^2)}{4(\beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2 + \alpha^2 \beta^2)}. \end{aligned}$$

Je considère le sommet S; sa puissance par rapport à la sphère inscrite est

$$P = \overline{SO}^2 - R^2$$

ou

$$P = r^2 - R^2,$$

qui devient, en vertu des valeurs précédentes,

$$P = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \gamma^2)}{4(\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \gamma^2)}.$$

C. Q. F. D.

En transformant cette expression au moyen des formules des nos 2 et 6, on trouve

$$P = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}.$$

C. Q. F. D.

Remarques. — I. La première formule du n° 4 est un cas particulier du théorème suivant :

Dans tout tétraèdre, le rapport des produits des arêtes opposées est égal à celui des produits des sinus des dièdres correspondants.

II. En divisant membre à membre les égalités

$$v = \frac{\alpha\beta\gamma}{3},$$

$$s = \frac{\sqrt{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2}}{2},$$

et en désignant par h la hauteur du tétraèdre, on trouve

$$h = 4R.$$

Il en résulte que la droite SOH est la hauteur du tétraèdre.

Note. — Solutions analogues de MM. J. Griess, maître répétiteur au lycée d'Alger; P. Barbarin, professeur au lycée de Nice; E. Fauquem-bergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin, et J. Chambon, à Vierzon.