

ÉDOUARD LUCAS

Sur trois coniques confocales deux à deux

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 401-403

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__401_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR TROIS CONIQUES CONFOCALES DEUX À DEUX;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant :

Si trois coniques sont deux à deux bitangentes à un même cercle, leurs cordes communes concourent trois à trois en un même point.

C'est la généralisation d'un curieux théorème énoncé, pour le cas de trois coniques confocales deux à deux, par M. Émile Lemoine (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 143; t. XIII, p. 487). Désignons par x, y, z les puissances d'un point quelconque du plan par rapport aux trois cercles; les équations des trois coniques bitangentes à deux des trois cercles sont

$$\sqrt{y} + \sqrt{z} = 2a, \quad \sqrt{z} + \sqrt{x} = 2b, \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2c,$$

Ann. de Mathémat., 2^e série, t. XIX (Septembre 1880). 26

a, b, c ayant des signes quelconques. Les deux dernières équations s'écrivent

$$(x - z + 4b^2)^2 = 16b^2x \quad \text{et} \quad (x - y + 4c^2)^2 = 16c^2x;$$

divisons membre à membre et extrayons la racine carrée : nous obtenons, pour l'une des cordes d'intersection des deux coniques, l'équation

$$c(x - z + 4b^2) = b(x - y + 4c^2).$$

Par permutation circulaire, on obtient les équations des autres sécantes communes. Celles-ci sont vérifiées par les coordonnées du point qui se trouve à l'intersection de trois parallèles aux axes radicaux des trois cercles pris deux à deux, déterminées par

$$x - y = 4c(b - a),$$

$$y - z = 4a(c - b),$$

$$z - x = 4b(a - c).$$

La symétrie de ces formules démontre le théorème en question.

En éliminant le terme tout connu entre deux des équations des cordes, on obtient

$$ax(b - c) + by(c - a) + cz(a - b) = 0;$$

c'est l'équation de la droite qui joint le centre radical des trois cercles au point de concours des sécantes communes. Si l'on change le signe de a , de b ou de c , on obtient les trois autres points de concours.

Remarque. — En général, toute transformation analytique donne lieu à des théorèmes différents lorsque l'on remplace les éléments choisis pour système de coordonnées par d'autres. Ainsi, dans le cas présent, si x, y, z désignent les distances d'un point aux trois côtés d'un triangle, les transformations analytiques précédentes démontrent ce théorème :

Si trois paraboles sont tangentes à deux des trois côtés d'un triangle et ont respectivement pour axes trois droites concourantes partant des sommets du triangle, leurs cordes communes concourent trois à trois en un même point.