

ÉDOUARD LUCAS

Sur un théorème de M. Chasles concernant les coniques homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 397-401

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__397_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR UN THÉORÈME DE M. CHASLES CONCERNANT
LES CONIQUES HOMOFOCALES;**

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Parmi les nombreux et intéressants théorèmes donnés
par M. Chasles sur les coniques homofocales (*Comptes*

rendus des séances de l'Académie des Sciences, année 1844) et dont la connaissance permet de faciliter l'étude de la théorie des transcendentes elliptiques, nous rappellerons le suivant :

Si, par deux points fixes d'une conique, on fait passer un cercle variable, le lieu du point de concours des tangentes communes est une conique homofocale à la proposée; de plus, le lieu reste le même lorsque la droite qui joint les deux points fixes se déplace parallèlement à elle-même.

Considérons une ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et un point P de paramètre angulaire φ ; un point quelconque Q de la normale en P à l'ellipse a pour coordonnées

$$x = (a + \lambda b) \cos \varphi, \quad y = (b + \lambda a) \sin \varphi;$$

si l'on suppose $PQ = r$, on trouve

$$r^2 = (x - a \cos \varphi)^2 + (y - b \sin \varphi)^2,$$

ou bien, en désignant par b' la longueur du demi-diamètre conjugué de celui qui passe en P,

$$r = \lambda b';$$

on prendra d'ailleurs λ avec le signe $+$ ou avec le signe $-$ suivant que le point Q se trouvera sur la partie extérieure ou intérieure de la normale en P.

Si l'on suppose que le point P se déplace sur l'ellipse, λ restant constant, le point Q décrit une ellipse concentrique, d'axes $a + \lambda b$ et $b + \lambda a$; on retrouve ainsi un théorème de M. Transon. Dans le cas particulier où $\lambda = \pm 1$, les ellipses deviennent les cercles concentri-

ques de rayons $a \pm b$; ce résultat revient, au fond, à la construction bien connue de M. Chasles pour trouver les grandeurs des axes d'une ellipse définie par un système de deux diamètres conjugués.

Décrivons, du point Q comme centre, un cercle de rayon $r = \lambda b'$, tangent à l'ellipse au point P; on trouve aisément, pour les coordonnées du point R de concours des tangentes communes à l'ellipse et au cercle,

$$(1) \quad \begin{cases} (1 - \lambda^2)x = (a + 2\lambda b + \lambda^2 a) \cos \varphi, \\ (1 - \lambda^2)y = (b + 2\lambda a + \lambda^2 b) \sin \varphi, \end{cases}$$

ou bien

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{x}{\cos \varphi} + \frac{y}{\sin \varphi} = (a + b) \frac{b' + r}{b' - r}, \\ \frac{x}{\cos \varphi} - \frac{y}{\sin \varphi} = (a - b) \frac{b' - r}{b' + r}. \end{cases}$$

En multipliant membre à membre les équations (2), on obtient le lieu du point R lorsque l'on fait varier r ; on trouve ainsi

$$(3) \quad \frac{x^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{y^2}{\sin^2 \varphi} = a^2 - b^2 = c^2.$$

C'est l'équation d'une hyperbole homofocale à l'ellipse proposée, passant par le point P et par les points symétriques de celui-ci par rapport aux axes et au centre de l'ellipse donnée. On vérifie d'ailleurs les formules (1) *a posteriori*, en observant que la tangente à l'hyperbole en R passe par le point Q. Ces formules permettent de résoudre le problème suivant :

PROBLÈME. — *Par un point R extérieur à l'ellipse on mène les tangentes : calculer les rayons des cercles tangents à l'ellipse et aux deux tangentes issues du point R.*

Désignons par x, y les coordonnées du point R, par ρ sa distance à l'origine, par u et v ses distances aux deux foyers de l'ellipse, et par V l'angle des deux tangentes à l'ellipse menées par le point R. On a les formules

$$\cos V = \frac{4a^2 - u^2 - v^2}{2uv} \quad \text{et} \quad \cos V = \frac{a^2 + b^2 - \rho^2}{uv}.$$

Cela posé, on détermine les axes de l'hyperbole homofocale à l'ellipse proposée et passant par le point R au moyen de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} = 1,$$

d'où l'on tire, pour μ négatif,

$$2\mu = \rho^2 - a^2 - b^2 - uv$$

ou bien

$$\mu = -uv \cos^2 \frac{V}{2}.$$

Pour déterminer le paramètre angulaire φ des points d'intersection de l'hyperbole et de l'ellipse, on a

$$c^2 \cos^2 \varphi = a^2 + \mu, \quad -c^2 \sin^2 \varphi = b^2 + \mu,$$

et, en ajoutant,

$$c^2 \cos 2\varphi = \rho^2 - uv.$$

On en déduit facilement l'angle φ , que nous supposons compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et les angles $-\varphi, \pi \pm \varphi$.

Enfin, on obtient le rayon du cercle correspondant à chacun des quatre points d'intersection en tirant de la formule (2)

$$\frac{r}{b'} = \frac{(y - b \sin \varphi) \cos \varphi}{(x + a \cos \varphi) \sin \varphi}.$$

Si l'on désigne par r_1 et r_2 les rayons qui correspon-



dent aux deux points ayant pour paramètres angulaires φ et $\varphi + \pi$, on déduit de la formule précédente

$$r_1 r_2 = b'^2,$$

et par suite le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Aux deux extrémités d'un diamètre fixe d'une ellipse, on prend, sur les normales extérieures ou intérieures, deux longueurs dont le produit égale le carré du demi-diamètre conjugué : l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités est une hyperbole homofocale à l'ellipse proposée, passant par les deux extrémités du diamètre donné.*