

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 380-382

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__380_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

Mon cher Brisse,

Les polynômes de M. Laguerre ont vivement intéressé, et à juste raison, les personnes qui s'occupent de la théorie des équations. Me sera-t-il permis de signaler une de leurs propriétés qui n'a pas encore été remarquée ?

Soit

$$\begin{aligned} f_m(x) &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m, \\ f_0(x) &= a_0, \\ f_1(x) &= a_0 x + a_1, \\ &\dots, \\ f_n(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \\ f_{n+1}(x) &= a_0 x^{n+1} + a_1 x^n + \dots + a_{n+1}, \\ &\dots, \end{aligned}$$

$a_0, a_1, a_2, \dots$ désignant des coefficients constants. On tire des deux dernières formules

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= x f_n + a_{n+1}, \\ f_n &= x f_{n-1} + a_n, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut, en multipliant la première de ces équations par a_n , la seconde par a_{n+1} , et en retranchant,

$$f_{n+1} a_n = f_n (a_n x + a_{n+1}) - a_{n+1} f_{n-1}.$$

Nous supposons $a_0, a_1, \dots, a_m$ différents de zéro; nous pourrions alors écrire

$$f_{n+1} = f_n \left(x + \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) - \frac{a_{n+1}}{a_n} f_{n-1}.$$

Cette formule montre que 1° deux fonctions f_n ne peuvent pas s'annuler en même temps, sans quoi, si f_{n-1} et f_n s'annuleraient ensemble, il faudrait que f_{n-1} s'annulât en même temps, et ainsi de suite jusqu'à $f_0 = a_0$, qui par hypothèse est différent de zéro; 2° lorsque la fonction f_n s'annule, f_{n+1} et $\frac{a_{n+1}}{a_n} f_{n-1}$ sont de signes contraires.

Il en résulte que les fonctions

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &f_m, f_{m-1}, f_{m-2} \frac{a_m}{a_{m-1}}, f_{m-3} \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}}, f_{m-4} \frac{a_{m-2} a_m}{a_{m-3} a_{m-1}}, \\ &f_{m-5} \frac{a_{m-3} a_{m-1}}{a_{m-4} a_{m-2}}, f_{m-6} \frac{a_{m-4} a_{m-2} a_m}{a_{m-5} a_{m-3} a_{m-1}}, \dots \end{aligned} \right.$$

jouissent de la propriété essentielle des fonctions de Sturm, en sorte que, si, dans la suite précédente, on substitue à la place de x deux nombres α et β , le nombre de variations perdues ou gagnées (ce nombre ne pouvant se perdre ou se gagner que par le terme f_n) sera une limite inférieure du nombre des racines comprises entre α et β .

Veut-on, par exemple, une limite inférieure du nombre des racines positives de $f_m(x) = 0$, on fera $x = 0$ et $x = \infty$ dans la suite (1); en supposant $a_0 > 0$, ce qui est permis, on aura deux suites dont les signes seront ceux des suites

$$a_m, a_{m-1}, \frac{a_{m-2}a_m}{a_{m-1}}, \frac{a_{m-3}a_{m-1}}{a_{m-2}}, \frac{a_{m-4}a_{m-2}a_m}{a_{m-3}a_{m-1}}, \dots,$$

$$1, 1, \frac{a_m}{a_{m-1}}, \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}}, \frac{a_{m-2}a_m}{a_{m-3}a_{m-1}}, \dots,$$

ou même des suites

$$a_m, a_{m-1}, a_m a_{m-1} a_{m-2}, a_{m-1} a_{m-2} a_{m-3}, a_m a_{m-1} a_{m-2} a_{m-3} a_{m-4}, \dots,$$

$$1, 1, a_m a_{m-1}, a_{m-1} a_{m-2}, a_m a_{m-1} a_{m-2} a_{m-3}, \dots$$

Ce théorème, analogue à celui de Fourier, est beaucoup plus simple dans la pratique. H. LAURENT.