

CH. BIEHLER

Sur les équations linéaires

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 356-362

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__356_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, t. XIX, p. 311.

riables x_1, x_2, \dots, x_n :

$$Y_1 = \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \dots + \alpha_{1,n}x_n,$$

$$Y_2 = \alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \dots + \alpha_{2,n}x_n,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$Y_p = \alpha_{p,1}x_1 + \alpha_{p,2}x_2 + \dots + \alpha_{p,n}x_n.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{1}{2}f'_{x_1} = X_1, \quad \frac{1}{2}f'_{x_2} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{1}{2}f'_{x_n} = X_n,$$

on aura

$$X_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n,$$

$$X_2 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$X_n = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n,$$

et, en prenant les dérivées des deux membres de l'équation (12), successivement par rapport à x_1, x_2, \dots, x_n , il viendra

$$X_1 = \alpha_{1,1}Y_1 + \alpha_{1,2}Y_2 + \dots + \alpha_{p,1}Y_p,$$

$$X_2 = \alpha_{1,2}Y_1 + \alpha_{2,2}Y_2 + \dots + \alpha_{p,2}Y_p,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$X_n = \alpha_{1,n}Y_1 + \alpha_{2,n}Y_2 + \dots + \alpha_{p,n}Y_p.$$

Si, dans ces identités, on remplace par zéro $n - p - 1$ des variables x_1, x_2, \dots, x_n , il restera, dans les fonctions $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_p$, $p + 1$ de ces variables; Y_1, Y_2, \dots, Y_p seront des fonctions homogènes de $(p + 1)$ variables, que nous désignerons par Y'_1, Y'_2, \dots, Y'_p ; par suite, les équations $Y'_1 = 0, Y'_2 = 0, \dots, Y'_p = 0$ formeront un système de p équations homogènes à $p + 1$ variables, et elles admettront une infinité de solutions, d'après ce qui a été démontré (III); il existe donc une infinité de manières d'annuler les fonctions X'_1, X'_2, \dots, X'_n (nous désignons ainsi les fonctions qui proviennent de X_1, X_2, \dots, X_n quand on a remplacé par zéro les $n - p - 1$ variables dont il a été question).

Si l'on considère $p + 1$ des équations $X'_1 = 0, X'_2 = 0, \dots, X'_n = 0$, ces équations formant un système de $p + 1$ équations homogènes à $p + 1$ inconnues qui admet pour ces inconnues des valeurs différentes de zéro, le déterminant d'ordre $p + 1$ des coefficients des inconnues est donc nul.

On voit donc que, en égalant à zéro successivement les variables qui entrent dans toutes les combinaisons possibles de $n - p - 1$ variables x_1, x_2, \dots, x_n et en formant tous les systèmes possibles de $p + 1$ équations au moyen des équations analogues à $X'_1 = 0, X'_2 = 0, \dots, X'_n = 0$, on ferait voir que tous les déterminants mineurs d'ordre $p + 1$ du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

sont nuls, et par suite aussi tous les déterminants mineurs d'ordre supérieur à $p + 1$. Δ est l'invariant de la fonction f . On a donc cette proposition :

Si une fonction homogène f du second degré de n variables est réductible à une somme de p carrés ($p < n$), l'invariant Δ de cette fonction ainsi que tous les déterminants mineurs de Δ jusqu'à l'ordre $p + 1$ inclusivement sont nuls.

Inversement, si l'invariant Δ de la fonction f est nul, ainsi que tous les mineurs de Δ jusqu'à l'ordre $p + 1$, et qu'un mineur d'ordre p de Δ ne soit pas nul, la fonction f sera réductible à une somme de p carrés de fonctions linéaires des n variables qui entrent dans f , et elle ne sera pas réductible à un nombre moindre de carrés.

Supposons, pour fixer les idées, que le déterminant

Les déterminants de la forme (γ') étant tous nuls, on voit qu'en décomposant (γ'') en une somme de déterminants d'ordre $p + 1$ de la forme (γ') , l'équation (γ'') se réduit à

$$(\gamma'') \quad \begin{vmatrix} a_{1,\alpha} & a_{1,\beta} & \dots & a_{1,\lambda} & X_1 \\ a_{2,\alpha} & a_{2,\beta} & \dots & a_{2,\lambda} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,\alpha} & a_{p,\beta} & \dots & a_{p,\lambda} & X_p \\ X_\alpha & X_\beta & \dots & X_\lambda & f \end{vmatrix} = 0;$$

les fonctions $X_\alpha, X_\beta, \dots, X_\lambda$ sont des fonctions linéaires et homogènes de X_1, X_2, \dots, X_p , car le déterminant (γ') est nul; par suite, l'équation précédente nous montre que f est une fonction homogène du second degré de X_1, X_2, \dots, X_p . Cette fonction est, comme l'on sait, décomposable en une somme de p carrés de fonctions linéaires de X_1, X_2, \dots, X_p . Je dis que ce nombre de carrés ne sera pas inférieur à p .

On aurait, en effet, dans ce cas

$$(13) \quad f = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_{p-1}^2,$$

où Z_1, Z_2, \dots, Z_{p-1} sont des fonctions linéaires et homogènes de X_1, X_2, \dots, X_p , par suite de x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \epsilon_{1,1}x_1 + \epsilon_{1,2}x_2 + \dots + \epsilon_{1,n}x_n, \\ Z_2 &= \epsilon_{2,1}x_1 + \epsilon_{2,2}x_2 + \dots + \epsilon_{2,n}x_n, \\ &\dots\dots\dots, \\ Z_{p-1} &= \epsilon_{p-1,1}x_1 + \epsilon_{p-1,2}x_2 + \dots + \epsilon_{p-1,n}x_n, \end{aligned}$$

et, en prenant les dérivées des deux membres de l'identité (13), il viendra

$$\begin{aligned} X_1 &= \epsilon_{1,1}Z_1 + \epsilon_{2,1}Z_2 + \dots + \epsilon_{p-1,1}Z_{p-1}, \\ X_2 &= \epsilon_{1,2}Z_1 + \epsilon_{2,2}Z_2 + \dots + \epsilon_{p-1,2}Z_{p-1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ X_n &= \epsilon_{1,n}Z_1 + \epsilon_{2,n}Z_2 + \dots + \epsilon_{p-1,n}Z_{p-1}. \end{aligned}$$

En donnant à $n - p$ des variables x_1, x_2, \dots, x_n la valeur zéro, $X_1, X_2, \dots, X_n, Z_1, Z_2, \dots, Z_{p-1}$ deviennent des fonctions de p variables que nous désignerons par $X'_1, X'_2, \dots, X'_n, Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{p-1}$. Les équations $Z'_1 = 0, Z'_2 = 0, \dots, Z'_{p-1} = 0$, homogènes à p variables, admettent une infinité de solutions; par suite, $X'_1 = 0, X'_2 = 0, \dots, X'_n = 0$ admettent aussi une infinité de solutions; on en conclut, de la même manière que précédemment, que tous les déterminants mineurs d'ordre p de Δ sont nuls. Cette conclusion est contraire à l'hypothèse que nous avons faite, à savoir qu'un déterminant d'ordre p de Δ est différent de zéro; par conséquent, la fonction f n'est pas réductible à $p - 1$ carrés.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on désigne par Δ l'invariant d'une fonction homogène du second degré, et s'il existe un déterminant mineur de Δ d'ordre p qui ne soit pas nul, les déterminants mineurs de Δ d'ordre supérieur à p étant tous nuls, la fonction homogène f sera réductible à une somme de p carrés, et ce nombre p représente le nombre minimum de carrés auxquels la fonction f est réductible.*

Ce théorème nous donne aussi les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction f , homogène et du second degré, des n variables x_1, x_2, \dots, x_n soit décomposable en un produit de facteurs linéaires en x_1, x_2, \dots, x_n , savoir

$$f = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n).$$

Il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que tous les déterminants mineurs du troisième ordre de l'invariant Δ de f soient nuls, sans que les mineurs du deuxième ordre soient tous nuls.

Le théorème précédent montre encore que les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction f soit le carré d'une fonction linéaire de x_1, x_2, \dots, x_n s'obtiennent en égalant à zéro tous les mineurs du deuxième ordre de Δ .