

CH. VÉNARD

Sur une règle de M. Laguerre

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 261-264

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__261_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE RÈGLE DE M. LAGUERRE;

PAR M. CH. VÉNARD,

Elève en Mathématiques spéciales au lycée de Rennes.

M. Laguerre a fait voir (même tome, p. 50) qu'un nombre a est une limite supérieure des racines positives d'une équation $f(x) = 0$ si la suite des nombres obtenus en formant le quotient et le reste de la division de $f(x)$ par $x - a$ ne présente que des permanences. Je dis que cette limite a est supérieure ou au moins égale à la limite fournie par la suite connue de Newton.

Soient $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m$ les coefficients du quotient et le reste de la division de

$$f(x) = A_0 x^m + \dots + A_{m-1} x + A_m$$

par $x - a$. On sait qu'entre ces nombres on a les relations

$$\begin{aligned} f_m &= af_{m-1} + A_m, \\ f_{m-1} &= af_{m-2} + A_{m-1}, \\ &\dots \dots \dots, \\ f_{m-p} &= af_{m-p-1} + A_{m-p}, \\ &\dots \dots \dots, \\ f_1 &= af_0 + A_1, \\ f_0 &= A_0. \end{aligned}$$

Calculons les dérivées successives de $f_m(a)$. On trouve facilement, en se servant des formules précédentes, que

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} f_m' &= f_{m-1} + af_{m-2} + \dots \\ &+ a^{p-1}f_{m-p} + \dots + a^{m-1}f_0, \end{aligned} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f_m''}{1.2} &= C_1^1 f_{m-2} + C_1^2 af_{m-3} + \dots \\ &+ C_1^{p-1} a^{p-2} f_{m-p} + \dots + C_1^{m-1} a^{m-2} f_0, \end{aligned} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f_m'''}{1.2.3} &= C_2^2 f_{m-3} + C_2^3 af_{m-4} + \dots \\ &+ C_2^{p-1} a^{p-3} f_{m-p} + \dots + C_2^{m-1} a^{m-3} f_0, \end{aligned} \right.$$

et l'on est ainsi amené à poser

$$(p) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f_m^{(p)}}{1.2.3\dots p} &= C_{p-1}^p f_{m-p} + C_{p-1}^{p-1} af_{m-p-1} + \dots \\ &+ C_{p-1}^{m-2} a^{m-p-1} f_1 + C_{p-1}^{m-1} a^{m-p} f_0. \end{aligned} \right.$$

Je dis que cette loi est générale. Supposons-la vraie pour la $p^{\text{ième}}$ dérivée, et démontrons qu'elle est vraie pour la $(p+1)^{\text{ième}}$. En calculant cette dérivée, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{f_m^{(p+1)}}{1.2.3\dots p} \\ &= C_{p-1}^p f_{m-p-1} + 2C_{p-1}^{p+1} af_{m-p-2} + 3C_{p-1}^{p+2} a^2 f_{m-p-3} + \dots + (m-p)C_{p-1}^{m-1} a^{m-p-1} f_0 \\ &+ C_{p-1}^p f_{m-p-1} + C_{p-1}^{p-1} af_{m-p-2} + C_{p-1}^{p-2} a^2 f_{m-p-3} + \dots + C_{p-1}^{p-1} a^{m-p-1} f_0 \\ &+ C_p^p af_{m-p-2} + C_p^{p-1} a^2 f_{m-p-3} + \dots + \dots \\ &+ C_{p-1}^{p+1} a^2 f_{m-p-3} + \dots + \dots \\ &+ C_{p-1}^{m-2} a^{m-p-1} f_0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en faisant la somme,

$$\begin{aligned} & \frac{f_m^{(p+1)}}{1.2.3\dots p} = C_p^{p+1} f_{m-p-1} + (2C_{p-1}^{p+1} + C_p^{p+1}) af_{m-p-2} \\ &+ (3C_{p-1}^{p+2} + C_p^{p+2}) a^2 f_{m-p-3} + \dots \\ &+ [(m-p)C_{p-1}^{m-1} + C_p^{m-1}] a^{m-p-1} f_0, \end{aligned}$$

On trouve ainsi, en calculant de proche en proche,

$$\begin{aligned} f_0 &= f_m^{(m)}, \\ f_1 &= f_m^{(m-1)} - C_{m-2}^{m-1} a f_m^{(m)}, \\ f_2 &= f_m^{(m-2)} - C_{m-3}^{m-2} a f_m^{(m-1)} + C_{m-3}^{m-1} a^2 f_m^{(m)}, \end{aligned}$$

et l'on démontre facilement que l'on a, en général,

$$\begin{aligned} f_{m-p} &= f_m^{(p)} - C_{p-1}^p a f_m^{(p+1)} + C_{p-1}^{p+1} a^2 f_m^{(p+2)} - \dots \pm C_{p-1}^{m-1} a^{m-p} f_m^{(m)}, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_{m-2} &= f_m'' - C_1^2 a f_m''' + C_1^3 a^2 f_m^{(4)} - \dots \pm C_1^{m-1} a^{m-2} f_m^{(m)}, \\ f_{m-1} &= f_m' - C_0^1 a f_m'' + C_0^2 a^2 f_m''' - \dots \mp C_0^{m-1} a^{m-1} f_m^{(m)}, \\ f_m &= A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \dots + A_m. \end{aligned}$$

Sous ces formes, on voit que, si le nombre a rend positives la fonction f_m et ses dérivées, il ne s'ensuit pas nécessairement que a rende positives les fonctions $f_0, f_1, \dots, f_{m-p}, \dots, f_{m-1}$. Par exemple, si nous prenons la deuxième de ces fonctions, f_1 , qui est égale à $A_0 a + A_1$, par hypothèse, $f_m^{(m-1)} = \frac{m A_0 a + A_1}{1.2 \dots (m-1)}$ et $f_m^{(m)} = \frac{A_0}{1.2 \dots m}$ sont positives; il ne résulte pas nécessairement que $A_0 a + A_1$ soit positif.

Donc, en général, la limite supérieure des racines positives d'une équation fournie par la règle de Newton est plus petite que la limite fournie par la règle de M. Laguerre.