

CH. BIEHLER

Sur un procédé d'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 202-206

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__202_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN PROCÉDÉ D'ÉLIMINATION;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Soient deux équations de même degré

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m = 0,$$

$$\varphi(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m = 0.$$

Formons la série des polynômes $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_{m-1}(x)$, $F_m(x)$, savoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(x) = A_0 \varphi(x) - B_0 f(x) \\ \text{ou bien} \\ F_1(x) = G_{1,1} x^{m-1} + G_{1,2} x^{m-2} + \dots + G_{1,m}, \\ \left\{ \begin{array}{l} F_2(x) = A_0 x F_1(x) - G_{1,1} f(x), \\ \text{ou} \\ F_2(x) = G_{2,1} x^{m-1} + G_{2,2} x^{m-2} + \dots + G_{2,m}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} F_{m-1}(x) = A_0 x F_{m-2}(x) - G_{m-2,1} f(x) \\ \text{ou} \\ F_{m-1}(x) = G_{m-1,1} x^{m-1} + G_{m-1,2} x^{m-2} + \dots + G_{m-1,m}, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et enfin

$$\left\{ \begin{array}{l} F_m(x) = A_0 x F_{m-1}(x) - G_{m-1,1} f(x) \\ \text{ou} \\ F_m(x) = G_{m,1} x^{m-1} + G_{m,2} x^{m-2} + \dots + G_{m,m}. \end{array} \right.$$

Cela posé, si $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ ont une racine commune, cette racine est aussi commune aux équations

$$F_1(x) = 0, \quad F_2(x) = 0, \quad \dots, \quad F_{m-1}(x) = 0, \quad F_m(x) = 0.$$

On en conclut que le déterminant Δ des coefficients de ces m équations, considérées comme linéaires en x^{m-1} , x^{m-2} , ..., x , x^0 est nul.

Nous allons démontrer que la condition $\Delta = 0$ est aussi la condition suffisante pour que les équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ aient une racine commune.

Pour le faire voir, exprimons d'abord le polynôme $F_\mu(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $\varphi(x)$.

A cet effet, considérons les égalités

$$\begin{aligned} F_\mu(x) &= A_0 x F_{\mu-1}(x) - G_{\mu-1,1} f(x), \\ F_{\mu-1}(x) &= A_0 x F_{\mu-2}(x) - G_{\mu-2,1} f(x), \\ &\dots\dots\dots, \\ F_2(x) &= A_0 x F_1(x) - G_{1,1} f(x), \\ F_1(x) &= A_0 \varphi(x) - B_0 f(x). \end{aligned}$$

Si l'on élimine $F_{\mu-1}(x)$, $F_{\mu-2}(x)$, ..., $F_1(x)$ entre ces μ équations, en multipliant la première par 1, la deuxième par $A_0 x$, la troisième par $A_0^2 x^2$, etc., et la dernière par $A_0^{\mu-1} x^{\mu-1}$ et en ajoutant, il viendra

$$F_\mu(x) = A_0^\mu x^{\mu-1} \varphi(x) - \varphi_{\mu-1} f(x),$$

$\varphi_{\mu-1}$ étant le polynôme de degré $\mu - 1$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu-1} &= G_{\mu-1,1} + G_{\mu-2,1} A_0 x + G_{\mu-3,1} A_0^2 x^2 + \dots \\ &\quad + G_{1,1} A_0^{\mu-2} x^{\mu-2} + B_0 A_0^{\mu-1} x^{\mu-1}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant Δ est identique à celui qu'on obtient en remplaçant dans Δ les éléments de la dernière colonne par $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_m(x)$, quantités que l'on obtient en multipliant les éléments des diverses colonnes de Δ par x^{m-1} , x^{m-2} , ..., x^0 et en ajoutant par rangées les éléments ainsi modifiés. On a donc identiquement

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-1} & F_1(x) \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-1} & F_2(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,m-1} & F_m(x) \end{vmatrix},$$

et, en vertu de l'égalité

$$F_\mu(x) = A_0^\mu x^{\mu-1} \varphi(x) - \varphi_{\mu-1} f(x),$$

le déterminant Δ pourra s'écrire

$$\Delta = U\varphi(x) - Vf(x),$$

en posant

$$U = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-1} & A_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-1} & A_0^2 x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,m-1} & A_0^m x^{m-1} \end{vmatrix}$$

et

$$V = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-1} & B_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-1} & \varphi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,m-1} & \varphi_{m-1} \end{vmatrix}.$$

Les polynômes U et V sont donc de degré $m-1$.

L'identité

$$\Delta = U\varphi(x) - Vf(x)$$

montre que, si $\Delta = 0$, les équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ ont au moins une racine commune. Par suite, $\Delta = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations proposées aient une racine commune.

Dans le cas où $n = m$ et

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m,$$

l'équation en γ devient

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{m-1} & A_m + A_0 \gamma \\ A_2 & A_3 & \dots & A_m + A_0 \gamma & A_1 \gamma \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m + A_0 \gamma & A_1 \gamma & \dots & A_{m-2} \gamma & A_{m-1} \gamma \end{vmatrix} = 0.$$